1_2. Mátrixszámítás

Végeselem-módszer

Definíciók, jelölések

Az m × n számú számból és/vagy szimbólumból álló m sorú és n oszlopú táblázatot *mátrix*nak nevezzük.

$$\underline{A} = \left[a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \begin{matrix} (i = 1,\ 2,\ \dots\ m \\ j = 1,\ 2,\ \dots\ n). \end{matrix}$$

Ha a mátrix sorainak és oszlopainak száma azonos (m = n), akkor n-ed rendű *kvadratikus mátrix*nak nevezzük.

A kvadratikus *mátrix főátlóján* a mátrix bal felső (a_{11}) és job alsó (a_{nn}) elemét összekötő egyenes mentén levő elemek együttesét értjük.

A sorok és oszlopok felcserélésével nyert mátrixot a *mátrix transzponáltjá*nak nevezzük, és felső T indexszel jelöljük ($\underline{A}^T$).

$$\underline{A}^T = \left[a_{ji}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \begin{matrix} (i = 1,\ 2,\ \dots\ m \\ j = 1,\ 2,\ \dots\ n). \end{matrix}$$

A transzponáltjával megegyező kvadratikus mátrixot *szimmetrikus mátrix*nak nevezzük.

$$\underline{A} = \underline{A}^T, \qquad \text{azaz } a_{ij} = a_{ji}, \quad (i, j = 1, 2, \dots n).$$

A szimmetrikus mátrix a főátlóra szimmetrikus.

Ha a kvadratikus mátrix főátlóján kívül az összes eleme zérus, akkor *diagonálmátrix*hoz jutunk.

$$\underline{\underline{D}}=\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}=\langle d_{11} \quad d_{22} \quad d_{33} \quad \dots \quad d_{nn} \rangle \ .$$

Az *egységmátrix* olyan diagonálmátrix, ahol a főátlóban levő elemek mindegyike 1-gyel egyenlő.

$$\underline{\underline{I}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}=\left[\delta_{ij}\right] , \qquad \delta_{ij}=\begin{cases} 1 & ha \quad i=j \\ 0 & ha \quad i \neq j \ , \end{cases} \qquad (i,j=1,\ 2,\ \dots\ n) \ .$$

δ_{ij} Kronecker-féle szimbólum.

A csupa 0 elemből álló mátrixot *zérusmátrix*nak nevezzük.

*Oszlopvektor*nak nevezzük az egyetlen oszlopból álló mátrixot (n = 1).

$$\underline{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}=\left[a_i\right] , \qquad (i=1,\ 2,\ \dots\ m) \ .$$

*Sorvektor*nak nevezzük az egyetlen sorból álló mátrixot (m = 1). A sorvektor mindig tekinthető egy oszlopvektor transzponáltjának, ez a jelölésében megmutatkozik

$$\underline{b}^T=\left[b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \dots \quad b_n\right] \ .$$

*Egységvektor*nak nevezzük azt a sor- vagy oszlopvektort, amelynek egyetlen zérustól különböző eleme van, ami eggyel egyenlő. Összesen n db n-ed rendű egységvektor van (n a vektor elemeinek száma).

Azt a mátrixot, amelynek elemei maguk is mátrixok, *hipermátrix*nak, az elemeit jelentő mátrixokat pedig *blokkok*nak nevezzük. A mátrixnak blokkokra való felosztása a *particionálás*.

A hipermátrix alakja:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}_{11} & \underline{\underline{A}}_{12} & \cdots & \underline{\underline{A}}_{1q} \\ \underline{\underline{A}}_{21} & \underline{\underline{A}}_{22} & \cdots & \underline{\underline{A}}_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{\underline{A}}_{p1} & \underline{\underline{A}}_{p2} & \cdots & \underline{\underline{A}}_{pq} \end{bmatrix} = \left[\underline{\underline{A}}_{ij}\right], \qquad \begin{matrix} (i = 1,\ 2,\ \ldots\ p \\ j = 1,\ 2,\ \ldots\ q) \end{matrix}\ .$$

Az azonos sorindexű blokkok sorainak és az azonos oszlopindexű blokkok oszlopainak a száma egyenlő.

Alapműveletek mátrixokkal

Egyenlőség

Két mátrix akkor és csak akkor egyenlő, ha sorainak és oszlopainak száma megegyezik és az azonos indexű elemeik egyenlők.

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}} \qquad \text{ha} \quad a_{ij} = b_{ij}, \quad \begin{matrix} (i = 1,\ 2,\ \ldots\ m \\ j = 1,\ 2,\ \ldots\ n) \end{matrix}\ .$$

Összeadás, számmal való szorzás

Azonos típusú (sorok és oszlopok száma megegyezik) mátrixok adhatók össze. Az *összegmátrix* típusa megegyezik a tagok típusával és elemeit

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}, \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\ , \quad (i = 1, 2, \ldots m; j = 1, 2, \ldots n)$$

módon számítjuk.

Az összeadás kommutatív és asszociatív művelet.

Az $\underline{A}$ mátrix *c számmal való szorzatá*t a

$$c \cdot \underline{\underline{A}} = c \cdot \left[a_{ij}\right] = \left[c \cdot a_{ij}\right] \qquad \text{mátrix adja.}$$

A számmal való szorzás kommutatív és disztributív művelet.

Mátrixok szorzása

Ha $\underline{\underline{A}}$ mátrix m × p típusú és $\underline{\underline{B}}$ mátrix p × n típusú, akkor a szorzatuk m × n típusú, és elemeit az $\underline{\underline{A}}$ sorvektorainak és a $\underline{\underline{B}}$ oszlopvektorainak skaláris szorzata adja.

$$\underset{m\times n}{\underline{\underline{C}}} = \underset{m\times p}{\underline{\underline{A}}} \cdot \underset{p\times n}{\underline{\underline{B}}} = \left\lfloor c_{ij} \right\rfloor, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

A mátrixok szorzása általában nem kommutatív, vagyis $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$. Ha $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$, akkor $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ mátrixok felcserélhetők. Az asszociativitás és disztributivitás mátrixok szorzásakor is érvényes.

Bármely kvadratikus mátrix zérus- és egységmátrixszal felcserélhető.

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{0}} = \underline{\underline{0}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}, \qquad \text{valamint}$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}.$$

Mátrix oszlopvektorral csak jobbról szorozható, ha a mátrix oszlopainak száma megegyezik a vektor sorainak számával és az eredmény egy oszlopvektor.

$$\underset{m\times n}{\underline{\underline{A}}} \cdot \underset{n\times 1}{\underline{x}} = \underset{m\times 1}{\underline{b}}, \qquad \underline{\underline{A}} = \left\lfloor a_{ij} \right\rfloor, \qquad \underline{x} = \left\lfloor x_j \right\rfloor, \qquad \underline{b} = [b_i]$$

$$b_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot x_k, \qquad (i = 1, 2, \ldots m; \qquad j = 1, 2, \ldots n).$$

Mátrix sorvektorral csak balról szorozható, ha a sorvektor oszlopainak száma megegyezik a mátrix sorainak számával és az eredmény egy sorvektor.

$$\underset{1\times m}{\underline{c}^T} \cdot \underset{m\times n}{\underline{\underline{A}}} = \underset{1\times n}{\underline{d}^T}, \qquad \underline{\underline{A}} = \left\lfloor a_{ij} \right\rfloor, \qquad \underline{c}^T = [c_i], \qquad \underline{d}^T = [d_j]$$

$$d_j = \sum_{k=1}^{m} c_k \cdot a_{kj}, \qquad (i = 1, 2, \ldots m; \qquad j = 1, 2, \ldots n).$$

Sorvektor és oszlopvektor szorzatát vektorok *skaláris szorzatá*nak nevezzük, ami egy számot ad eredményül. A sor- és az oszlopvektor rendjének azonosnak kell lenni.

$$\underline{a}^T \cdot \underline{b} = \underline{c} = \sum_{k=1}^{m} a_i \cdot b_i , \qquad (i = 1, 2, \dots m).$$

Oszlopvektor és egy sorvektor szorzatát *diadikus szorzat*nak nevezzük. Eredményül mátrixot kapunk.

$$\underline{a} \cdot \underline{b}^T = \underline{\underline{A}} = [a_{ij}], \qquad a_{ij} = a_i \cdot b_j \qquad (i = 1, 2, \dots m; \qquad j = 1, 2, \dots n).$$

Két vagy több mátrix szorzatának transzponáltja egyenlő a transzponáltak ellenkező sorrendben vett szorzatával.

$$(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})^T = \underline{\underline{B}}^T \cdot \underline{\underline{A}}^T$$

Hipermátrixok esetén is érvényesek ezek a műveleti szabályok, kiegészítve azzal, hogy a megfelelő blokkok között az éppen elvégzendő művelet szerinti, a blokkok soraira és oszlopaira vonatkozó feltételeknek teljesülniük kell.

Determináns, kvadratikus *mátrix inverze*

Egy kvadratikus mátrix *determináns*án a

$$|\underline{\underline{A}}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot |\underline{\underline{A}}_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot |\underline{\underline{A}}_{ij}|$$

számot értjük, ahol $|\underline{\underline{A}}_{ij}|$ az $\underline{\underline{A}}$ mátrix a_{ij} eleméhez tartozó előjeles aldetermináns értéke. Az elemhez tartozó aldeterminánst úgy kapjuk, hogy a mátrixból az elemnek megfelelő sort és oszlopot töröljük. Az előjelet a sakktábla szabálynak megfelelően rendeljük az aldeterminánshoz.

Ismerve a másodrendű kvadratikus mátrix determinánsának számítási módját (F 1.1.) rekurzív eljárást ad az n-ed rendű kvadratikus mátrix determinánsának számítására.

Másodrendű kvadratikus mátrix determinánsa:

$$|\underline{\underline{A}}| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Egy kvadratikus mátrix *inverzé*nek azt a mátrixot nevezzük, melyre az

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}}$$

azonosság teljesül. $\underline{\underline{B}}$ mátrix az $\underline{\underline{A}}$ inverze, melyet $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}^{-1}$ módon is jelölünk.

Az inverz mátrix létezésének szükséges és elégséges feltétele az, hogy az $\underline{\underline{A}}$ determinánsa nullától különböző legyen, $|\underline{\underline{A}}| \neq 0$. Ellenkező esetben a mátrix szinguláris, nincs inverze.

Az inverz mátrix számítható az

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{|\underline{\underline{A}}|} \cdot adj\, \underline{\underline{A}}$$

módon, ahol (*adj* $\underline{\underline{A}}$) az $\underline{\underline{A}}$ mátrix adjungáltja, ami az $\underline{\underline{A}}$ mátrix elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokból mint elemekből alkotott mátrix transzponáltja.

A gyakorlatban az inverz mátrix ismeretére lineáris egyenletrendszer megoldásakor lenne szükségünk. Ekkor azonban az inverz mátrix közvetlen előállítás helyett az egyenletrendszer megoldását megadó numerikus eljárásokat használunk, és nem a fenti definíciónak megfelelően állítjuk elő a mátrix inverzét. Ilyen eljárások például a Gauss-elimináció, vagy iterációs eljárások, pl. a Gauss-Seidel eljárás.

Mátrixok mérhetősége

A mátrixokhoz hozzárendelhetők skalár számok, amelyek azok valamilyen tulajdonságára jellemzők.

Kvadratikus mátrix determinánsán kívül használatos még a *mátrix nyoma* (spur) is

$$Sp(\underline{\underline{A}}) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{mm}$$

ami a főátlóban levő elemek összegét jelenti.

A *mátrix normája* pl. az alábbi módokon értelmezhető.

Ha $\underline{\underline{A}} = [a_{ij}]$; ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots , n$), akkor

abszolút érték norma

$$\|\underline{\underline{A}}\| = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| .$$

Euklideszi norma

$$\|\underline{\underline{A}}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} = \sqrt{Sp\left(\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\right)} .$$

A *mátrix rangja* megegyezik az $\underline{A}$ elemeiből kiválasztható legmagasabb rendű zérustól különböző értékű aldeterminánsának rendszámával. Jelölése: $\rho(\underline{A})$. Ez azt is jelenti, hogy az n-ed rendű nemszinguláris mátrix rangja n, $\rho(\underline{A}) = n$.

Az $\underline{A}$ kvadratikus mátrix *pozitív definit*, ha bármely $\underline{x} \neq 0$ vektorra

$$\underline{x}^T \underline{A}\, \underline{x} > 0,$$

és *pozitív szemidefinit*, ha bármely $\underline{x} \neq 0$ vektorra

$$\underline{x}^T \underline{A}\, \underline{x} \geq 0.$$

A pozitív definit mátrix nemszinguláris.

Mátrixok deriválása, integrálása

Ha az $\underline{A}$ mátrix elemei a t skalár paraméter függvényei (amelyek differenciálhatók és/vagy integrálhatók), akkor a mátrix deriváltja

$$\frac{d}{dt}(\underline{A}) = \frac{d}{dt}\left(\left[a_{ij}(t)\right]\right) = \left[\frac{d\, a_{ij}}{dt}\right],$$

és integrálja

$$\int_0^{t_1} \underline{A} \cdot dt = \int_0^{t_1} \left[a_{ij}(t)\right] dt = \left[\int_0^{t_1} a_{ij}\, dt\right].$$

Irodalom: [Rózsa 1974, Korn – Korn 1975, Popper 1980, Szabó – Roller 1974], ezeken kívül bármely mátrixszámítással foglalkozó tankönyv, kézikönyv.