

BME Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék

# A síkbeli aprózódás egy lehetséges modellje

Készítette: Eisenberger Viktória

Konzulens: Dr. Domokos Gábor

## Tartalomjegyzék

1. Bevezetés .....	2
2. Az algoritmus kifejtése .....	3
2.1. Véletlenszerű egyenes felvétele .....	3
2.2. Sokszög elvágása .....	4
2.3. Egyensúlyi helyzetek számának meghatározása .....	5
2.4. A poligonok halmazának kezelése .....	5
3. Statisztikák és eredmények .....	5
3.1. Idő szerinti átlagos statisztika .....	5
3.2. Az összes poligonra vonatkozó eloszlás .....	6
3.3. Az egyensúlyi helyzetek számának változása alapján készített statisztika .....	7
4. Háromszögtérkép .....	7
5. A számolt statisztikák valósággal való kapcsolata .....	9
6. További lehetőségek .....	10
7. Összefoglalás .....	10
Irodalom .....	11

## 1. Bevezetés

Ridegen törő anyagokkal kapcsolatos egyik alapvető jelenség az aprózódás, melynek leírásával geológusok, fizikusok és matematikusok egyaránt foglalkoznak [1][2][3]. Különösen érdekes ez a jelenség a kőzetek alakfejlődésének szempontjából, hiszen az aprózódás generálja az alakfejlődés kezdeti feltételeit. Az alakfejlődés leírására a közelmúltban javasolt [3][4] rendszer a kavicsok statikus egyensúlyi helyzeteinek számlálásán alapul.

Jelen dolgozatban a síkbeli aprózódás egy lehetséges modelljében vizsgáljuk a statikus egyensúlyi helyzetek számának alakulását. Megmutatjuk, hogy véletlenszerű modellünkben tetszőleges  $N$ -szögből kiindulva az aprózódás során keletkező sokszögek élszáma monoton módon 4-hez konvergál. Ezzel párhuzamosan a stabil egyensúlyi helyzetek száma ( $S$ ) is konvergál egy 4-nél kisebb számhoz, bár a konvergencia nem monoton.

Vizsgáljuk ezen kívül a poligonok egyensúlyi helyzeteinek számának változását, azaz  $S$  növekedésének és csökkenésének esélyét a levágott területarány függvényében.

Bár modellünk síkbeli, úgy gondoljuk, hogy a modell által bemutatott jelenség kvalitatív egyezést mutat a 3 dimenziós feladattal. Ennek illusztrálására a stabil helyzetek számára kapott sűrűségfüggvényt összevetjük zúzottkövek mérési adataiból nyert sűrűségfüggvénnyel.

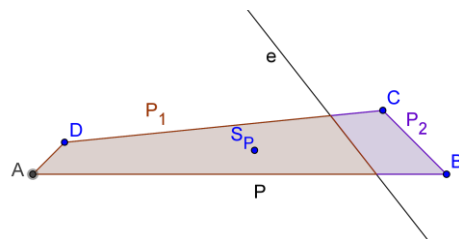
Egy alternatív modellben is megvizsgáljuk a háromszögek stabil egyensúlyi helyzetei számának az eloszlását, a háromszög alakjától függően, és összevetjük az aprózódásos modell eredményeivel.

Végül felvetünk lehetséges további kutatási irányokat.

A számításokat Matlab programokkal végeztük, melyek működési elvét az alábbiakban részletesen bemutatjuk.

## 2. Az algoritmus kifejtése

A síkbeli aprózódást oly módon modelleztük, hogy konvex poligonokat egyenesekkel vágunk ketté. A konvex poligonok halmaza erre a műveletre invariáns, vagyis a művelettel nem lehet kilépni a halmazból, így mindvégig konvex poligonokat vizsgálunk. Konvex poligonok egyenessel való vágása esetén mindig két darab, szintén konvex poligont fogunk kapni.



1. ábra  $P$  poligon  $e$  egyenessel  $P_1$  és  $P_2$  darabra való vágása

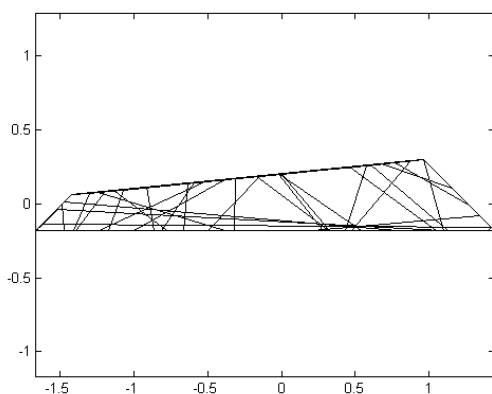
A kiinduló poligont nevezzük  $P_0$ -nak, az aktuális poligont mindig  $P$ -nek, súlypontját  $S_P$ -nek. Az algoritmus először választ  $P$ -hez egy véletlenszerű metsző egyenest, majd meghatározza a két poligont, amit a vágás eredményeképp kapunk, ezek lesznek  $P_1$  és  $P_2$ . (1. ábra) Ezt a műveletet egy alakzatra, majd minden darabjára ismételtén végrehajtjuk, így kapunk egy nagy poligon halmazt. A részpoligonok oldalainak és egyensúlyi helyzeteinek a számából statisztikák készíthetők.

### 2.1. Véletlenszerű egyenes felvétele

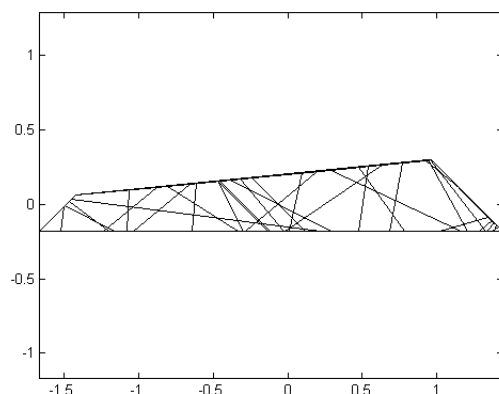
A vágáshoz szükségünk van egy véletlenszerűen felvett egyenesre, de nem mindegy, hogy hogyan választjuk meg.

Egy természetes módszer az lenne, hogy először egyenletes eséllyel kisorsoljuk, hogy milyen szögben álljon az egyenes, majd az ilyen szögű,  $P$ -t metsző egyenesek közül választunk véletlenszerűen egyet. Ez azonban egy lapos alakzatot ugyanolyan valószínűséggel vágna el hosszában, mint keresztben. (2. ábra)

Azért, hogy a modell minél jobban kövesse a természetes törési mintákat, mi egy másik módszert alkalmazunk, oly módon, hogy egy hosszúkas alakzat valószínűbben vágódjon el keresztben, mint hosszában. Ezt úgy érjük el, hogy szög és távolság szerint meghatározott metsző egyenesek közül azonos eséllyel választjuk ki bármelyiket. (3. ábra)

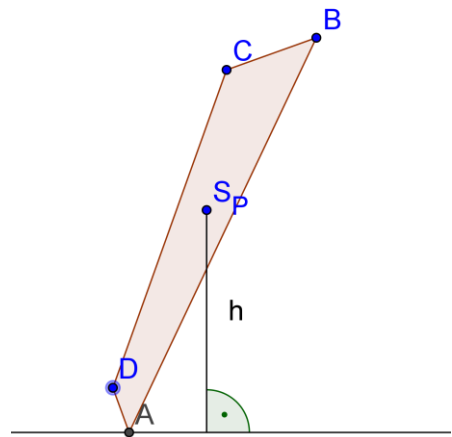


2. ábra  $P$  poligon 20-szor elvágva egyenletesen választott szög alapján sorsolt egyenesekkel.

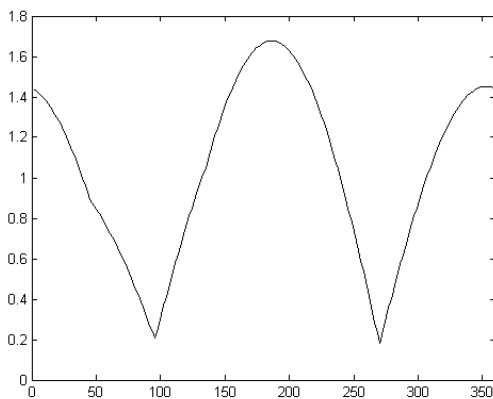


3. ábra  $P$  poligon 20-szor elvágva szög és távolság alapján sorsolt egyenesekkel.

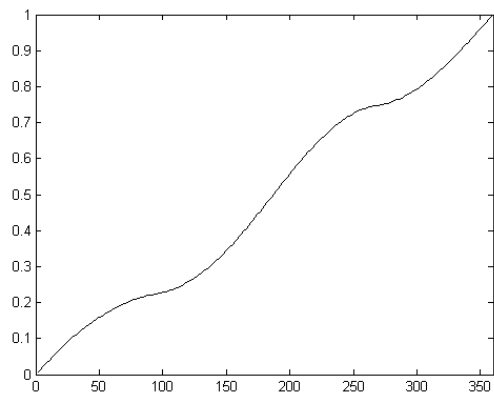
Ezt úgy tudjuk megtenni, hogy leképezzük a lehetséges egyeneseket egy síkra, aminek egyik tengelye az egyenes függőlegessel bezárt szöge, másik tengelye az egyenes súlyponttól való távolsága. Ezen a síkon a poligont metsző egyenesek egy görbe alatt fognak elhelyezkedni, s ez a görbe megegyezik a gördített poligon támaszfüggvényével. (4. ábra) Ez a görbe koszinusz függvényekből állítható össze. (5. ábra) Ahhoz, hogy ezek közül az egyenesek közül azonos eséllyel válasszuk bármelyiket, a szög megválasztásánál ezt a függvényt használjuk az eloszlás sűrűségfüggvényeként [6], a távolságot pedig az adott szögnél lehetségesek közül egyenletesen sorsoljuk. Ebben az esetben P poligon támaszfüggvénye a 5., az eloszlásfüggvény a 6. ábrán látható alakot veszi fel.



4. ábra Gördített poligon súlypontjának a magassága, avagy a támaszfüggvény:  $h(\varphi)$ .



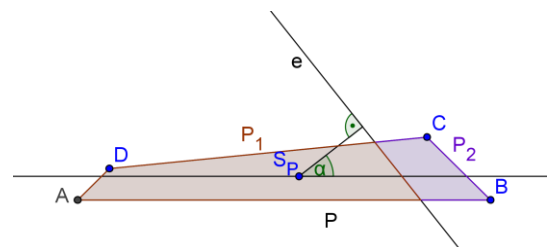
5. ábra P poligon támaszfüggvénye  $\varphi$  függvényében



6. ábra P poligonhoz tartozó eloszlásfüggvény, melyet a metsző egyenes sorsolásához használunk

## 2.2. Sokszög elvágása

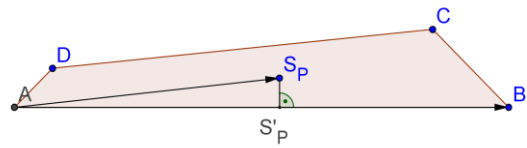
Az egyenest a rá merőleges irány vízszintessel bezárt szögével ( $\alpha$ ), valamint a sokszög súlypontjától való előjeles távolságával ( $d$ ) adtuk meg. (7. ábra) Ez alapján meghatározzuk a képződő részpoligonokat, P1-et és P2-t.



7. ábra P poligon a metsző e egyenessel és paramétereivel

### 2.3. Egyensúlyi helyzetek számának meghatározása

Ehhez a számításhoz a poligon súlypontjára és konvex burkára van szükségünk. Mivel modellünkben csak konvex sokszögekkel foglalkozunk, ezért a konvex burok adott. A súlypontot a statikából ismert képlettel számítjuk ki.



8. ábra P poligon  $S_P$  súlypontjának vetülete az AB oldalon

Síkbeli alakzat stabil egyensúlyi helyzetei csak a konvex burok élein lehetnek. A poligon egy AB élén akkor lesz stabil egyensúlyi helyzet, hogyha az  $S_P$  súlypontból az AB él egyenesére állított merőleges talppontja az AB szakaszon belülré esik. (8. ábra) Ezt skaláris szorzással meghatározhatjuk, miszerint ha teljesül, hogy

$$0 < \frac{AB \cdot AS}{AB \cdot AB} < 1$$

akkor az AB oldalon létezik stabil egyensúlyi helyzet.

Ezt a módszert minden oldalra alkalmazva meghatározható, hogy egy konvex poligonnak hány darab stabil egyensúlyi helyzete van.

### 2.4. A poligonok halmazának kezelése

A statisztikák készítésekor egy poligont sem vetünk el, a kettévágások során kapott poligonokat mind megtartjuk, majd azokat szintén kettévágjuk. Így a poligonok egy bináris fát alkotnak. Készíthetünk idő szerinti statisztikákat, azokat a poligonokat kezelve egy csoportként, amelyek a fa azonos szintjén vannak, azaz azonos számú vágás után keletkeztek  $P_0$ -ból. Ezt a számot  $t$ -vel fogjuk jelölni. Néhány esetben szemléletesebb az összes adatot egyben kezelni, ilyen statisztikákat is készítettünk.

Mivel a poligonok száma  $2^t$ , ezért a realiztikusan számítható tartomány  $t$  kis értékeire korlátozódik. Az itteni statisztikához  $t=15$  lépést használtunk.

## 3. Statisztikák és eredmények

Az oldalak számát és az egyensúlyi helyzetek számát vizsgáltuk részletesebben az így megalkotott poligonhalmazon.

### 3.1. Idő szerinti átlagos statisztika

Ennél a statisztikánál az azonos  $t$  értékhez tartozó poligonokat vettük egy csoportnak, és ezeknek az átlagos élszámát, valamint átlagos egyensúlyi helyzeteinek a számát vizsgáltuk, hogy hogyan változik idő szerint.

Az oldalak számának időbeni változásánál láthatjuk, hogy az átlag mindig monoton tart a 4-hez. Ez belátható analitikusan is, hiszen a csúcsok, és így az oldalak számát ( $N$ ) is minden vágással 4-gyel növeltük, a poligonok számát pedig eggyel, és tudjuk, hogy adott  $t$  értéknél  $2^t$  poligon képződött eddig. Elméletileg előfordulhat, hogy az egyenes átmegy a poligon valamelyik csúcsán, de ennek 0 a valószínűsége, ezért ez a határértéket nem befolyásolja.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_0 + 4 \cdot 2^t}{2^t} = 4.$$

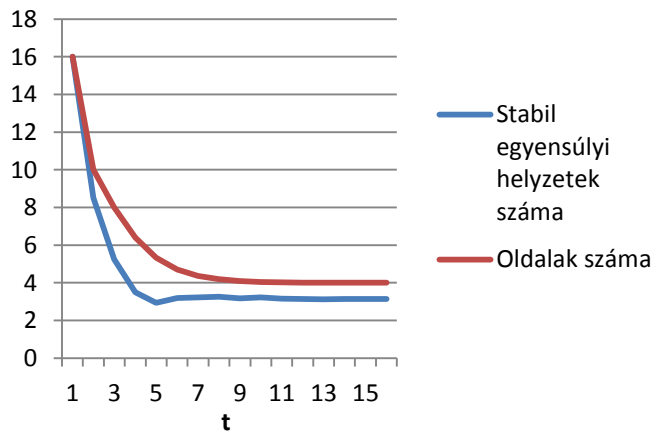
A képlet alapján az is megállapítható, hogy ha a kezdő poligonunk legalább ötszög, azaz  $N_0 > 4$ , akkor ez felülről tart a négyhez (9. ábra), ha háromszög, akkor  $N_0 < 4$ , így alulról tart a négyhez (10. ábra), ha pedig négyszög, akkor  $N_0 = 4$ , és az átlag konstans 4 lesz.

Az egyensúlyi helyzetek átlagát vizsgálva láthatjuk, hogy bár nem monoton, de ez az érték is tart egy számhoz, körülbelül 3,15-höz.

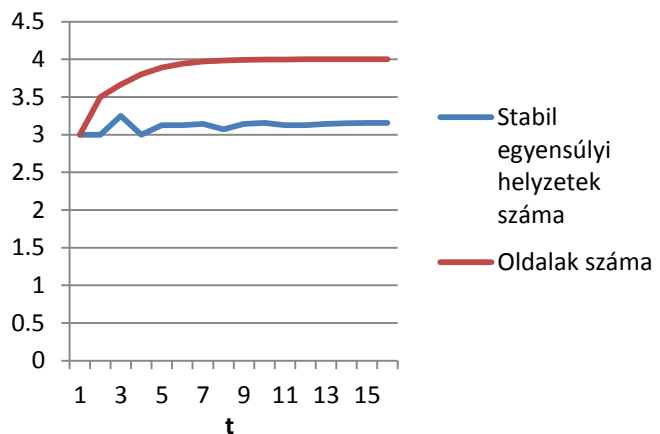
### 3.2. Az összes poligonra vonatkozó eloszlás

Ez a statisztika az összes számolt poligon figyelembevételével készült, és az oldalak számának, illetve az egyensúlyi helyzetek számának az eloszlását mutatja be. (11. ábra)

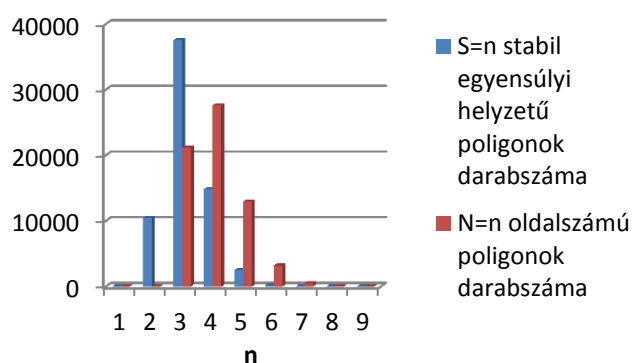
Tudjuk, hogy mivel stabil egyensúlyi helyzet csak oldalon lehet, ezért minden poligonra igaz, hogy  $S \leq N$ . Ez megjelenik az ábrán is, hiszen látható, hogy a két eloszlásfüggvény alakja



9. ábra  $N_0=16$  oldalú kiindulópoligonon készített idő szerinti átlagos statisztika



10. ábra Háromszög kiindulópoligonon készített idő szerinti átlagos statisztika



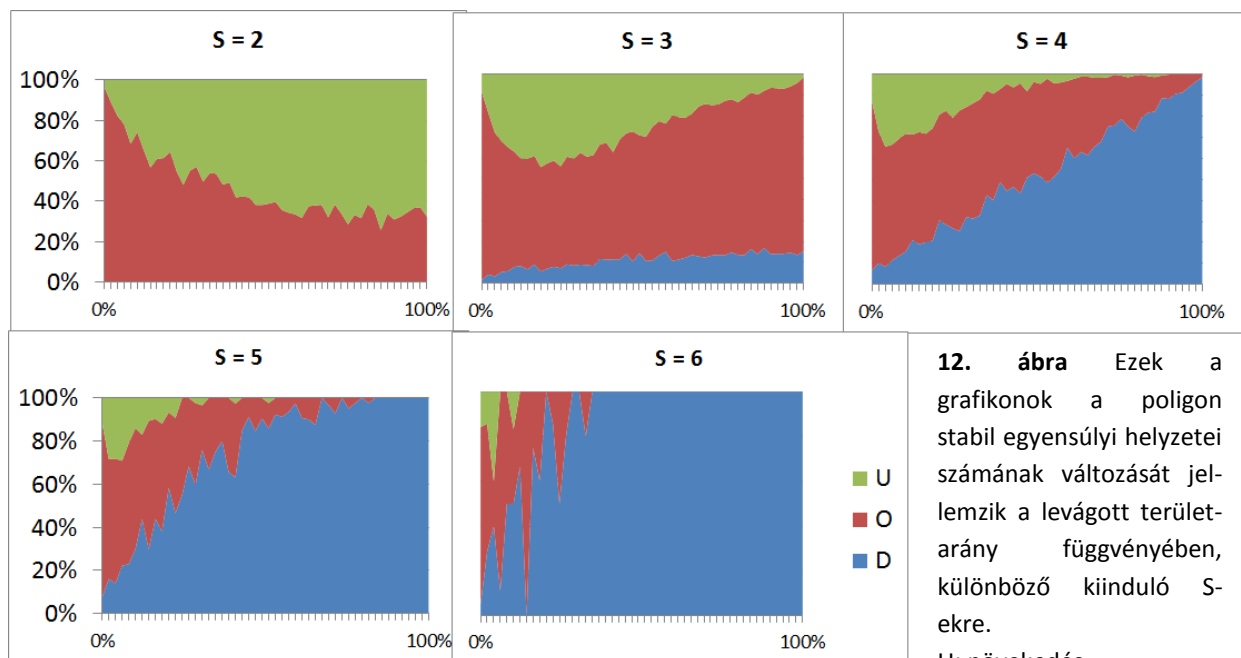
11. ábra Az egy futtatásból létrejött összes poligon alapján készített statisztika

nagyon hasonló, csak eltoltan. Így az egyensúlyi helyzetek száma a leggyakrabban 3, az oldalak száma pedig 4.

### 3.3. Az egyensúlyi helyzetek számának változása alapján készített statisztika

Megvizsgáltuk azt is, hogy egy vágás után a daraboknak milyen valószínűséggel lesz több, kevesebb, vagy ugyanannyi stabil egyensúlyi helyzete, mint az eredeti poligonnak, annak függvényében, hogy mekkora részt vágunk le az eredeti poligonból.

Ha  $S$  az éppen aktuálisan elvágott poligon egyensúlyi helyzeteinek a száma, minden  $S$ -re, amiből elég poligon áll rendelkezésre a statisztikához, kirajzoltunk egy grafikont, mely megmutatja ezeknek a valószínűségeknek az arányát. (12. ábra)



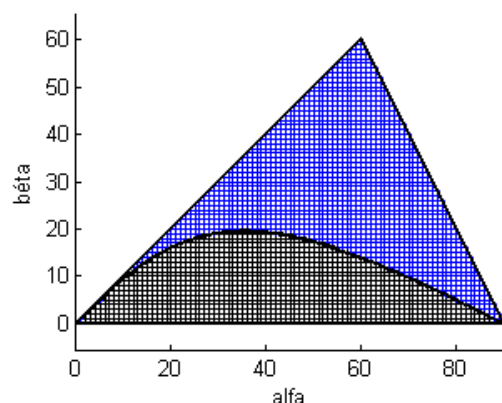
**12. ábra** Ezek a grafikonok a poligon stabil egyensúlyi helyzetei számának változását jellemzik a levágott területarány függvényében, különböző kiinduló  $S$ -ekre.

U: növekedés  
O: stagnálás  
D: csökkenés

## 4. Háromszögtérkép

A háromszögek egyensúlyi helyzeteinek számát tanulmányoztuk egy másik modellben is. Itt minden lehetséges háromszögalakot megvizsgáltunk, hogy melyeknél lesz 2, illetve 3 az egyensúlyi helyzetek száma. A hasonló, valamint tükrözött háromszögeket azonosnak tekintjük. Mivel a háromszögnek két szöge meghatározza a harmadikat, azaz két változóval leírható az alakja, így a háromszögalakok leképezhetőek egy síkra, legyen ez az  $\alpha - \beta$  sík. Rögzítjük, hogy

$$\beta < \alpha < \gamma.$$



**13. ábra** A különböző háromszögalakok leképezése az  $\alpha - \beta$  síkra. A kék részen lévő háromszögeknek 3 stabil egyensúlyi helyzetük van, míg a fekete részen lévőeknek csupán 2.



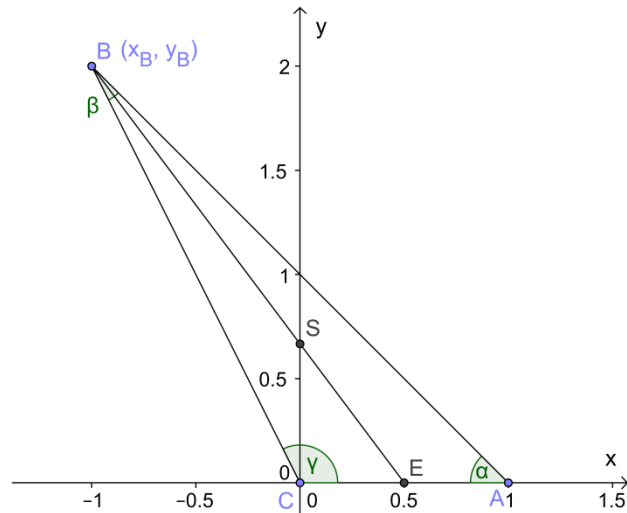
Tudjuk még azt is, hogy

$$0^\circ < \alpha, \beta, \gamma < 180^\circ.$$

Ezekkel a feltételekkel lehatárolunk az  $\alpha - \beta$  síkon egy háromszöget, amelyen minden alak csak egyszer szerepel. Ezután a síknak ezt a részét bizonyos pontossággal végigjárjuk, és minden háromszögre kiszámoljuk a korábbi módszerrel, hogy az adott alakú háromszögnek 2 vagy 3 az egyensúlyi helyzeteinek a száma. Ez alapján felrajzolhatunk egy térképet. (**13. ábra**)

Ezt a kísérleti alapon kijött ábrát számolással is meg tudjuk erősíteni. Tudjuk, hogy ahhoz, hogy ne 3 legyen az egyensúlyi helyzetek száma, kell, hogy legyen tompaszög. Ekkor a két nagyobb szöggel szembeni oldalról tudjuk, hogy stabil egyensúlyi helyzet, a legkisebb szöggel szembeni oldalt kell vizsgálnunk.

Helyezzük el a háromszöget a **14. ábrán** látható módon. Tudjuk, hogy a súlypont a súlyvonal oldalhoz közelebbi harmadolópontjában van, továbbá hogy a CA oldal akkor stabil egyensúlyi helyzet, ha  $x_S > 0$ .



**14. ábra** Rögzített  $C(0;0)$  és  $A(1;0)$  pontok esetén vizsgáljuk, hogy  $B(x_B, y_B)$  milyen elhelyezkedése esetén lesz az AC oldalon stabil egyensúlyi helyzet.

Ez pedig akkor teljesül, ha  $x_B > -1$ . A  $B$  pontot a háromszög két szárának metszéspontjaként írhatjuk fel, így

$$-1 < x_B = \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\alpha) + \tan(\gamma)}.$$

Ezt átrendezve megkaphatjuk a görbe egyenletét, ami

$$\beta < -\alpha + \arctan(2 \cdot \tan(\alpha))$$

lesz. Ez a görbe pontosan illeszkedik a kísérleti ábrára.

Ebben a modellben a 2 és 3 egyensúlyi helyzettel bíró háromszögek aránya 39% – 61% megoszlást mutat.

Felmerül a kérdés, hogy vajon ebből vonhatunk-e le következtetéseket a vágások során létrejövő háromszögekkel kapcsolatban, például, hogy következik-e ebből, hogy azok is ilyen megoszlással lesznek 2, illetve 3 egyensúlyi helyzetűek.

Hogy összevethessük ezeket az adatokat, megvizsgáltuk a darabolás során előforduló háromszögeket is. Az így keletkezett háromszögek közül csak 15% a 2 egyensúlyi helyzettel

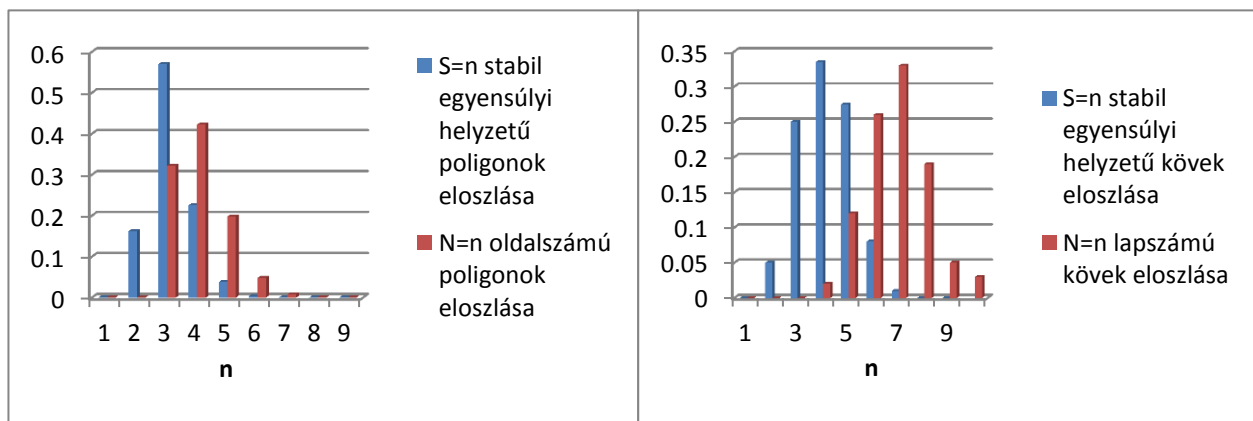
bírók aránya. A különbség oka, hogy azokat a háromszögeket más módon választottuk. Például tudjuk, hogy egy háromszögnek csak úgy lehet 2 egyensúlyi helyzete, ha van tompaszöge, viszont a vágás a hosszúkás alakzatokat valószínűbben tömörebbekre vágja, így lehet, hogy kisebb arányban fordul elő már tompa szög is, mint a szögek egyenletes választásánál.

## 5. A számolt statisztikák valósággal való kapcsolata

A fizikai világban a zúzottkövek aprózódása áll legközelebb modellünkhöz. Hogy ezt a jelenséget megfelelően össze tudjuk vetni a síkbeli modellel, szükségünk van egy a kövekről szóló statisztikára is. Ehhez 200 darab zúzottkő egyensúlyi helyzeteinek, valamint lapjainak a számát számoltam meg, és készítettem belőlük statisztikát. (15. ábra)



Síkban és térben egyaránt igaz, hogy egy alakzatnak soha nem lehet több stabil egyensúlyi helyzete, mint oldala (illetve lapja). Ez okozza az egyensúlyi helyzetek számának, és az oldalak számának az eloszlásának az eltolódását. A síkbeli modell, és a kövek számolásával készített statisztika biztató hasonlóságot mutat, ami jelentheti azt, hogy a modell térbe is kiterjesztett formája a jövőben esetleg használható lesz zúzottkő aprózódásának szimulálására.



15. ábra A síkbeli modell és a kövek statisztikájának összevetése

## 6. További lehetőségek

Ez a téma még számos lehetőséget nyitva hagy további kutatások számára.

Lehet, hogy másmilyen statisztikákat kapnánk, hogyha máshogy kezelnénk a poligonok halmazát, például ha nem tartanánk meg minden poligont, hanem minden vágásból a nagyobbat, vagy minden vágásból véletlenszerűen egyet. Az a verzió is érdekes eredményt hozhat, ha a vágásokból származó poligonokat egy közös halmazban gyűjtjük, és ezek közül véletlenszerűen veszünk ki mindig egyet, amelyet elvágunk.

A síkbeli modell további munkával kiterjeszthető lenne térben is, ezzel még egy lépéssel közelebb jutva a zúzottkő aprózódásához.

A háromszögtérképhez hasonló elven el lehetne készíteni egy négyszögtérképet is, ami ugyan kevésbé lenne szemléletes, mivel nem egy két dimenziós síkon, hanem egy négy dimenziós térben lenne ábrázolható, de mindenképpen érdekes lenne a négyszögek között a különböző mennyiségű egyensúlyi helyzetűek számának az aránya.

## 7. Összefoglalás

A dolgozat célja a síkbeli aprózódás egy modelljének felállítása és vizsgálata volt. Feltételeztük, hogy ebből a modellből következtetéseket vonhatunk le a zúzottkövek törésének mintájára, s a modell esetleges térbeli kiterjesztésével egy elég jó modellt adhatunk a természeti jelenségre.

A modellenél feltételeztük, hogy az aprózódás során egy poligon egy véletlenszerűen választott egyenes mentén esik szét. Ezután ez alapján a módszer alapján szétvágott poligonok alakfejlődését vizsgáltuk, oldalaik, és egyensúlyi helyzeteik számán keresztül.

Megmutattuk, hogy az idő során az oldalak számának átlaga monoton konvergál a 4-hez, az egyensúlyi helyzetek számáé pedig egy 4-nél kisebb számhoz, bár az a konvergencia nem monoton.

Vizsgáltuk az összes poligonon az oldalak és az egyensúlyi helyzetek számának eloszlását, majd az e két adat közötti összefüggéseket.

Bemutattuk, hogy a lehetséges háromszögalakok közül melyeknek lesz mindhárom oldalán stabil egyensúlyi helyzet, és milyen arányban áll ezek száma az összes háromszögalakhoz képest.

Összevetettük az eredményeket a modell egyik természeti megfelelőjével, a zúzottkövek aprózódásának folyamatával, s megmutattuk, hogy a két jelenség tartalmaz hasonlóságokat.

A dolgozat végén felvetettünk további lehetőségeket, amivel ezt a kutatást érdemlegesen lehetne folytatni, s amelyek érdekes eredményeket ígérnek.

A modell mutat hasonlóságokat a zúzottkövek aprózódásának jelenségével, így ha nem is ezzel a formájával, de egy fejlesztett változatával talán végrehajthatunk vele a jövőben olyan kísérleteket digitálisan, amik fizikai tárgyakkal nehézségekbe ütköznének.

## Irodalom

[1] Turcotte, D.L., Fractals and Fragmentation, *J. Geophysical Research/Solid Earth* **91** (B2) 1921-1926. (1986)

[2] Kun, F. et al. Scaling behaviour of fragment shapes. *Physical Review Letters* **96**. 025504 (2006)

[3] Rényi, A. Sulanke, R. Zufällige konvexe Polygone in einem Ringgebiet. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* **9** 146-157 (1968).

[4] Domokos, G. Sipos A.Á, Szabó T., Várkonyi P. , Pebbles, shapes and equilibria. *Mathematical Geosciences*, doi:10.1007/s11004-009-9250-4, **42**, No.1. pp 29-47. (2010)

[5] Szabó, T., Domokos G. A new classification system for pebble and crystal shapes based on static equilibrium points. *Central European Geology* **53** 1-19 (2010)

[6] Ketskeméty László, Valószínűségszámítás, Műegyetem Kiadó (2002)