



# Egyensúlyok geometriája: A támaszfüggvény lehetséges általánosítása

BME Szilárdságtani és Tartószerkezeti tanszék

2012. évi TDK konferencia

szerző: Baranyai Tamás  
konzulens: Dr. Domokos Gábor

## Kivonat

Görbékhez és felületekhez egyaránt rendelhető egy természetes koordináta rendszer. Görbéknél ezt az érintővektor, normálisvektor és a binormális feszíti ki, felület esetén a két főgörbületi irányba eső érintővektor és a normálisvektor. A konvex geometria egyik alapeszköze a támaszfüggvény [1]: a pontba mutató helyvektor külső normális irányú vetülete. Dolgozatunkban a helyvektornak a természetes koordináta rendszer többi irányába eső vetületeit -a külpontosság függvényeket-, mint a támaszfüggvény lehetséges általánosítását vezetjük be. A támaszfüggvényhez hasonlóan ezek is információt hordoznak a görbékről illetve a felületekről, például az őket közelítő sokszögek egyensúlyainak száma könnyen számítható segítségükkel. A numerikus számítási módszeren kívül alkalmazásukra egy példát hozandó levezetjük egy síkgörbét közelítő sokszög stabil egyensúlyainak határértékét, amint az oldalainak száma tart a végtelenbe.

Kulcsszavak: Konvex geometria, külpontosság, támaszfüggvény, természetes koordináta rendszer

[1] R. Schneider: Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory, Cambridge University Press, 1993.02.25.

# Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Előzetes megállapítások	3
3. Konvex síkgörbe függvényei	4
4. Konvex test függvényei	5
5. Az eredeti test visszaállítása	6
6. Síkgörbét közelítő sokszög egyensúlyai	7
6.1. Stabil egyensúlyok végesben . . . . .	7
6.2. Stabil egyensúlyok a végtelenben . . . . .	8
7. Összefoglalás	9

## 1. Bevezetés

Görbékhez és felületekhez egyaránt rendelhető egy természetes koordináta rendszer. Görbéknél ezt az érintővektor, a normálisvektor és a binormális feszíti ki, míg felületeknél a két főgörbületi irányba eső érintővektor, és a felületi normális.

A konvex geometria egyik alapeszköze a támaszfüggvény [1], melyet Minkowski vezetett be 1903-ban. Legyen  $A \in E^d$  egy konvex ponthalmaz a  $d$  dimenziós euklideszi térben! A homogenitás miatt legyen az origó  $A$  belsejében. Ekkor  $A$  támaszfüggvénye:  $H(A, \mathbf{u}) = \sup\{\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} : \mathbf{a} \in A\}$ , ( $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{u}$  vektorok, a pont skalárszorzatot jelöl). Ez akkor a legszemléletesebb, ha  $\|\mathbf{u}\| = 1$ . Belátható, hogy  $H(A, \mathbf{u})$  egyértelműen meghatározza  $A$ -t: az értelmezési tartomány minden pontjához tartozik egy feltér, a feltérek metszeteként pedig előáll  $A$ . Az értelmezési tartomány kétféle lehet:  $A$  és  $\mathbf{u}$ . Ez megközelítés kérdése, a kettő között kapcsolatot a Gauss leképezés teremt.

A támaszfüggvény definíciójából látszik, hogy az nem más, mint  $A$  egy pontjába mutató  $\mathbf{a}$  helyvektor külső normális irányú vetülete. Konvex ponthalmazok egyensúlyát vizsgáló kutatásunk közben azt figyeltük meg, hogy  $\mathbf{a}$ -nak a természetes koordináta rendszer többi irányába eső vetülete -nevezzük őket külpontosság függvényeknek- is hasznos dolgokat árul el számunkra. A dolgozat a támaszfüggvény lehetőség általánosításával foglalkozik, ebből a szempontból vizsgálja a helyvektor természetes koordináta rendszer irányú vetületeit.

A vizsgálat során előbb a síkbeli, aztán a térbeli, majd az általános eset kerül tárgyalásra. Ezután az eredeti ponthalmaz támasz és külpontosság függvényéből való helyreállíthatóságával foglalkozunk. Végül egy példa következik a külpontosság függvények gyakorlati alkalmazására. Egy, a tanszéken folyó kavicsmorfológiai kutatás osztályozza a formákat az őket közelítő sokszög/poliéder egyensúlyi helyzetei alapján. Síkban tetszőleges helyzetű közelítő sokszög egyensúlyainak számára kínálunk (numerikus) számítási módszert. Ezen kívül, ha a sokszög oldalainak száma a végtelenbe tart, zárt képletet adunk az egyensúlyok számának határértékére.

## 2. Előzetes megállapítások

Dőlt betűvel jelöljük a skalár mennyiségeket (pl.: $e$ ) vastag betűvel a vektorokat (pl.: $\mathbf{n}$ ). A vektor hosszát  $\|\mathbf{n}\|$  jelöli. A skalárszorzatot  $\cdot$ -al (ponttal), a vektoriális szorzatot  $\times$ -el jelöljük. Az origót jelölje  $O$ . Az  $n$  oldalú sokszöget jelölje  $P^n = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ , ahol  $\mathbf{v}_i$  jelöli a sokszög  $i$ -edik csúcsát. A  $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}$  csúcsokat összekötő sokszögoldal legyen  $\mathbf{g}_i = \mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i$ . Amikor egy ponthalmaz egyensúlyáról beszélünk, a ponthalmazt és a gravitációt homogénnek tételezzük fel. Megtámasztásul egy súrlódásmentes vízszintes egyenest vagy síkot tételezzük fel (előbbi síkban utóbbi térben). Az önsúlyvektort, mely mindig a ponthalmaz súlypontján megy át és merőleges a megtámasztásra, jelölje  $\mathbf{G}$ .

### 3. Konvex síkgörbe függvényei

Legyen  $T^2$  egy homogén, szigorúan konvex ponthalmaz  $E^2$ -ben, melynek kontúrja  $\mathbf{r}(s)$ : egy  $C^3$  folytonos, zárt síkgörbe. Tekintsünk rá úgy, mint egy adott síkba eső térgörbére! A számítás egyszerűsítése érdekében  $T^2$  súlypontja essen  $O$ -ba. Paraméterezése a görbének ( $s = [0, l]$ ) legyen ívhossz szerinti. Az érintő egységvektorát jelölje  $\mathbf{t}(s)$ , a külső normális egységvektorát  $\mathbf{n}(s)$ , a binormálisát  $\mathbf{b}(s)$ , a görbületét  $\kappa(s)$ . Legyen  $\rho(s) = \|\mathbf{r}(s)\|$ . Ezekre a Frenet-formulák alapján az alábbi összefüggések írhatók fel:

$$\mathbf{r}'(s) = \mathbf{t}(s) \quad (1)$$

$$\mathbf{t}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{n}(s) \quad (2)$$

$$\mathbf{n}'(s) = \kappa(s)\mathbf{t}(s) \quad (3)$$

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s), \quad (4)$$

ahol  $\mathbf{b}(s)$  merőleges a görbe síkjára. Írjuk fel  $\mathbf{r}(s)$ -nek a természetes koordináta rendszerbe eső vetületeit:

$$h(s) = \mathbf{r}(s) \cdot \mathbf{n}(s) \quad (5)$$

$$e(s) = \mathbf{r}(s) \cdot \mathbf{t}(s) \quad (6)$$

$$e_2(s) = \mathbf{r}(s) \cdot \mathbf{b}(s). \quad (7)$$

Mivel  $\mathbf{r}(s)$  síkgörbe,  $e_2 = 0$  konstans, a továbbiakban nem foglalkozunk vele. Egy példa  $h(s)$  és  $e(s)$  lefutására látható az 1. ábrán,  $\frac{a}{b} = \frac{1.3}{1}$  tengelyarányú ellipszis esetén. Az ellipszis kerületét  $K$  jelöli.

Az érintő és a normális közötti kapcsolat miatt  $e(s)$ ,  $h(s)$  és  $\rho(s)$  között is található kapcsolat. Mivel  $\mathbf{t}(s) \perp \mathbf{n}(s)$ :

$$\rho(s)^2 = e(s)^2 + h(s)^2. \quad (8)$$

Továbbá a (2) és (3) összefüggések miatt  $e(s)$  és  $h(s)$  megjelennek egymás deriváltjaiban:

$$h'(s) = \mathbf{r}'(s) \cdot \mathbf{n}(s) + \mathbf{r}(s) \cdot \mathbf{n}'(s) \quad (9)$$

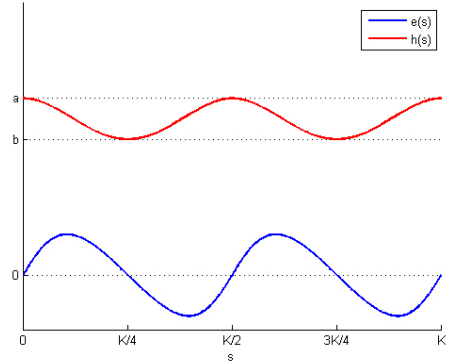
$$h' = \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{n}(s) + \mathbf{r}(s) \cdot \kappa(s) \cdot \mathbf{t}(s) \quad (10)$$

$$h' = 0 + \kappa(s) \cdot e(s) \quad (11)$$

$$e'(s) = \mathbf{r}'(s) \cdot \mathbf{t}(s) + \mathbf{r}(s) \cdot \mathbf{t}'(s) \quad (12)$$

$$e'(s) = \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s) - \mathbf{r}(s) \cdot \kappa(s) \cdot \mathbf{n}(s) \quad (13)$$

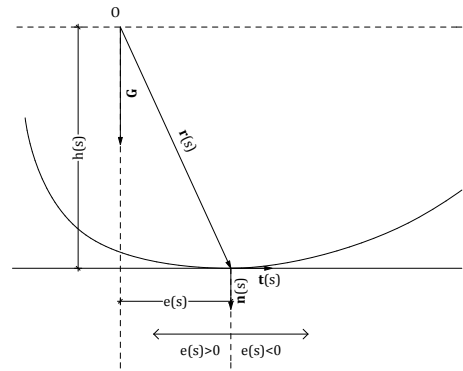
$$e'(s) = 1 - \kappa(s) \cdot h(s). \quad (14)$$



1. ábra.

Erre a tulajdonságra később visszatérünk, amikor az eredeti görbe támasz és külpontosság függvényekből való helyreállíthatóságát tárgyaljuk.

Ahogy  $T^2$  gördül a vízszintes egyenesen (2. ábra),  $\mathbf{G}$ -nek a külpontosságát (erővektor és pont vektorra merőleges távolsága) az érintési pontra megadja az  $e(s)$  függvény, innen a *külpontosság függvény* elnevezés. A gördülés során a helyzeti energia változása egyedül  $O$  és a megtámasztó egyenes távolságának, tehát a támaszfüggvénynek változásától függ. Így  $r(s)$  egyensúlyi pontjai a támaszfüggvény stacionárius helyein lesznek: stabilak a minimumoknál, instabilak a maximumoknál. Végezzük hát el  $h(s)$  szélsőértékvizsgálatát!



2. ábra.

$$h'(s) = 0 = 0 + \kappa(s) \cdot e(s) \quad (15)$$

Mivel  $\kappa(s) \neq 0$ , a kifejezés csak  $e(s) = 0$  esetén teljesül. Ennek a fizikai jelentése, hogy az egyensúlyi pontokban  $\mathbf{G}$ -nek nincs külpontossága az érintési pontra. Két vektor skalárszorzata akkor 0, hogyha a vektorok merőlegesek egymásra, tehát az egyensúlyi pontokban  $\mathbf{r}(s) \perp \mathbf{t}(s)$ , vagy másképp:  $\mathbf{r}(s) \parallel \mathbf{n}(s)$ .

Belátható (felhasználva (8)-at), hogy ezek a pontok  $\rho(s)$  stacionárius helyei is:

$$\rho'(s) = 0 = \frac{e(s) \cdot e'(s) + h(s) \cdot h'(s)}{\sqrt{e(s)^2 + h(s)^2}} \quad (16)$$

$$0 = e(s) \cdot e'(s) + h(s) \cdot h'(s) \quad (17)$$

$$0 = e(s) + e(s) \cdot \kappa(s) \cdot h(s) - e(s) \cdot \kappa(s) \cdot h(s) \quad (18)$$

$$0 = e(s). \quad (19)$$

Ezek az egyensúlyi pontok akkor általánosak [2], hogyha  $h(s) \neq \frac{1}{\kappa(s)}$ . (Ez  $\rho''(s) \neq 0$  -ból jön.) A külpontosság függvény szélsőértékeinek helyeiről azt tudjuk, hogy ott:

$$e'(s) = 0 = 1 - \kappa(s) \cdot h(s) \quad (20)$$

$$h(s) = \frac{1}{\kappa(s)}. \quad (21)$$

Tehát ha egy pontban mindkét függvénynek szélsőértéke van, akkor az nem lehet általános egyensúlyi pont. Ez nem meglepő, mivel  $\rho'(s) = e(s)$ . Egy ilyen példa a kör, ahol  $e(s) = 0$  konstans és  $h(s) = \rho(s) = \frac{1}{\kappa}$  konstans.

## 4. Konvex test függvényei

Legyen  $T^3$  egy konvex ponthalmaz  $E^3$ -ban, melynek kontúrja az  $\mathbf{R}(u, v)$  felület. A paraméterezése ( $u = [0, l_u[, v = [0, l_v[$ ) legyen a görbületi főirányokba eső, ívhossz szerinti. A természetes koordináta rendszert alkotó érintőkről ( $\mathbf{t}_u, \mathbf{t}_v$ ) és a külső normálisról ( $\mathbf{n}$ ) a következőket tudjuk:

$$\mathbf{t}_u(u, v) = \frac{d\mathbf{R}(u, v)}{du} \quad (22)$$

$$\mathbf{t}_v(u, v) = \frac{d\mathbf{R}(u, v)}{dv} \quad (23)$$

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{d\mathbf{t}_u(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{du} \cdot \frac{-1}{\kappa_u(u, v)} = \frac{d\mathbf{t}_v(u, v)}{dv} \cdot \frac{-1}{\kappa_v(u, v)} \quad (24)$$

$$\frac{d\mathbf{n}(u, v)}{du} = \kappa_u(u, v) \cdot \mathbf{t}_u(u, v) \quad (25)$$

$$\frac{d\mathbf{n}(u, v)}{dv} = \kappa_v(u, v) \cdot \mathbf{t}_v(u, v) \quad (26)$$

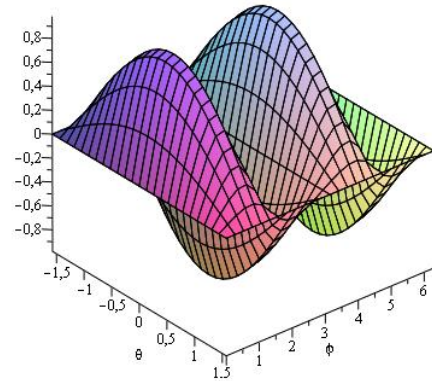
Síkbeli esethez hasonlóan definiálható a támaszfüggvény:

$$h(u, v) = \mathbf{n}(u, v) \cdot \mathbf{R}(u, v). \quad (27)$$

Külpontosság függvényből ebben az esetben kettő lesz:

$$e_u(u, v) = \mathbf{t}_u(u, v) \cdot \mathbf{R}(u, v) \quad (28)$$

$$e_v(u, v) = \mathbf{t}_v(u, v) \cdot \mathbf{R}(u, v). \quad (29)$$



3. ábra.

Mivel  $\mathbf{t}_u(u, v) \perp \mathbf{t}_v(u, v)$ ,  $\mathbf{G}$  külpontossága az érintési pontra összegezhető a következőképp:

$$e(u, v) = \sqrt{e_u(u, v)^2 + e_v(u, v)^2}. \quad (30)$$

Térben is érvényes a (8) összefüggés:

$$\|\mathbf{R}(u, v)\|^2 = e(u, v)^2 + h(u, v)^2. \quad (31)$$

A (24), (25) és (26) összefüggések miatt a támasz és külpontosság függvények kapcsolata az alábbi:

$$\frac{de_u(u, v)}{du} = 1 - \kappa_u(u, v) \cdot h(u, v) \quad (32)$$

$$\frac{de_v(u, v)}{dv} = 1 - \kappa_v(u, v) \cdot h(u, v) \quad (33)$$

$$\frac{dh(u, v)}{du} = \kappa_u(u, v) \cdot e_u(u, v) \quad (34)$$

$$\frac{dh(u, v)}{dv} = \kappa_v(u, v) \cdot e_v(u, v) \quad (35)$$

Egy-egy példa látható a külpontosság függvények lefutására, 1:2:3 tengelyarányú ellipszoid esetén a mellékelt ábrákon. A 3. és 4. ábra  $e_1$  és  $e_2$ -t, a 6.  $e$ -t mutatja. Az ellipszoid paraméterezése  $x = a \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\phi)$ ,  $y = b \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\phi)$ ,  $z = c \cdot \sin(\theta)$  volt.

Mint ahogy a támaszfüggvény is értelmezve van általános dimenzióban, ezek az összefüggések általánosíthatók  $T^d \in E^d$  konvex ponthalmaz esetére. Ekkor  $d - 1$  külpontosság függvény kapható, és ezeket kell pitagorasz tétellel összegezni, hogy  $e(1, 2, \dots, d)$ -t megkapjuk.

## 5. Az eredeti test visszaállítása

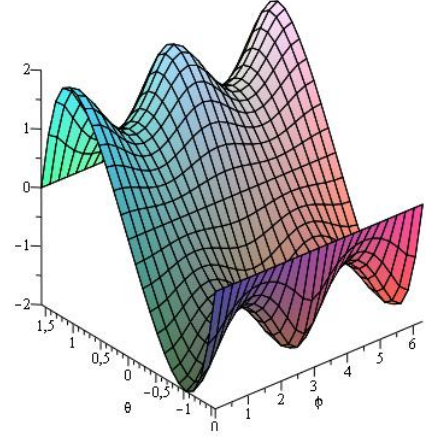
Az előzőekben egy vektorfüggvényt bontottunk vetületeire. Az eredeti  $d$  dimenzióbeli függvény visszakapható az egységvektorokkal irányított vetületeinek összegzésével:

$$\mathbf{r} = h \cdot \mathbf{n} + \sum_{i=1}^{d-1} e_i \cdot \mathbf{t}_i. \quad (36)$$

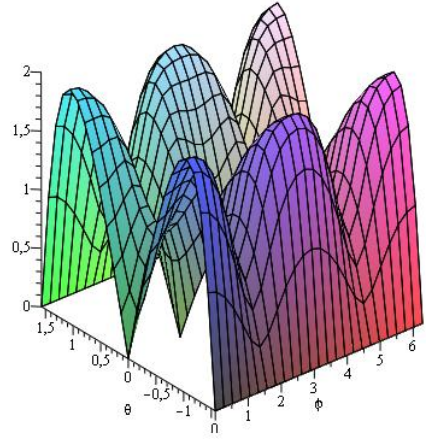
Mivel a támasz és külpontosság függvények megjelennek egymás deriváltjaiban, elég lehet egy vetület függvény ismerete az eredeti vektorfüggvény helyreállításához. Az informatikában a támaszfüggvényt már ma is használják erre [3]. Az alábbiakban a 2 dimenziós példa következik. Legyen  $h(\phi)$  értelmezési tartománya az  $\mathbf{r}$  normálisából létrejövő egységkör:  $\mathbf{n}(\phi) = [\sin(\phi), \cos(\phi)]$ . Ekkor

$$\frac{dh(\phi)}{d\phi} = \left| \frac{d\mathbf{r}(\phi)}{d\phi} \right| \cdot \mathbf{t}(\phi) \cdot \mathbf{n}(\phi) + \mathbf{r}(\phi) \cdot \mathbf{t}(\phi) \quad (37)$$

$$\frac{dh(\phi)}{d\phi} = 0 + e(\phi) \quad (38)$$



4. ábra.



5. ábra.

Ezen kívül tudjuk, hogy  $\frac{d\mathbf{n}(\phi)}{d\phi} = \mathbf{t}(\phi)$ . Ezeket használva a (36) összefüggés felírható a következőképp:

$$\mathbf{r}(\phi) = h(\phi) \cdot \mathbf{n}(\phi) + \frac{dh(\phi)}{d\phi} \cdot \frac{d\mathbf{n}(\phi)}{d\phi} \quad (39)$$

Kíséréljük meg az érintőből létrejövő egységkörön értelmezett külpontosság függvényből ugyanezt! A függvény deriváltja:

$$\frac{de(\phi)}{d\phi} = \left| \frac{d\mathbf{r}(\phi)}{d\phi} \right| \cdot \mathbf{t}^2(\phi) + \mathbf{r}(\phi) \cdot (-\mathbf{n}(\phi)) \quad (40)$$

$$\frac{de(\phi)}{d\phi} = \left| \frac{d\mathbf{r}(\phi)}{d\phi} \right| - h(\phi) \quad (41)$$

Ha ebből felírjuk (36) megfelelőjét, az alábbi kapjuk:

$$\mathbf{r}(\phi) = e(\phi) \cdot \mathbf{t}(\phi) - \frac{de(\phi)}{d\phi} \cdot \left( \left| \frac{d\mathbf{r}(\phi)}{d\phi} \right| - \frac{de(\phi)}{d\phi} \right) \quad (42)$$

$$0 = -\mathbf{r}(\phi) + e(\phi) \cdot \mathbf{t}(\phi) - \frac{de(\phi)}{d\phi} \cdot \left| \frac{d\mathbf{r}(\phi)}{d\phi} \right| + \frac{de(\phi)}{d\phi} \cdot \frac{de(\phi)}{d\phi} \quad (43)$$

Az elsőfokú differenciál egyenlet megoldása egy peremfeltételt követel, aminek a változása vélhetően nagytárat jelent. Ez alább következő térbeli esetből látszik, ugyanis a dimenziók számának növelésével a peremfeltételek száma nem nő. Legyen egy érintőből létrejövő egységgömb  $\mathbf{t}_\phi(\phi, \psi) = [\sin(\phi)\sin(\psi), \cos(\phi)\sin(\psi), \cos(\psi)]$ ,  $\phi \in [-\pi, \pi[$ ,  $\psi \in [0, \pi[$ .

Ekkor:

$$\frac{de_\phi(\phi, \psi)}{d\phi} = \left| \frac{d\mathbf{r}(\phi, \psi)}{d\phi} \right| \cdot \mathbf{t}_\phi^2(\phi, \psi) + \mathbf{r}(\phi, \psi) \cdot (-\mathbf{n}(\phi, \psi)) \quad (44)$$

$$h(\phi, \psi) = \left| \frac{d\mathbf{r}(\phi, \psi)}{d\phi} \right| - \frac{de_\phi(\phi, \psi)}{d\phi}. \quad (45)$$

Az egy peremfeltétel megadásával megkapható támaszfüggvény pedig egyértelműen meghatározza az eredeti vektorfüggvényt.

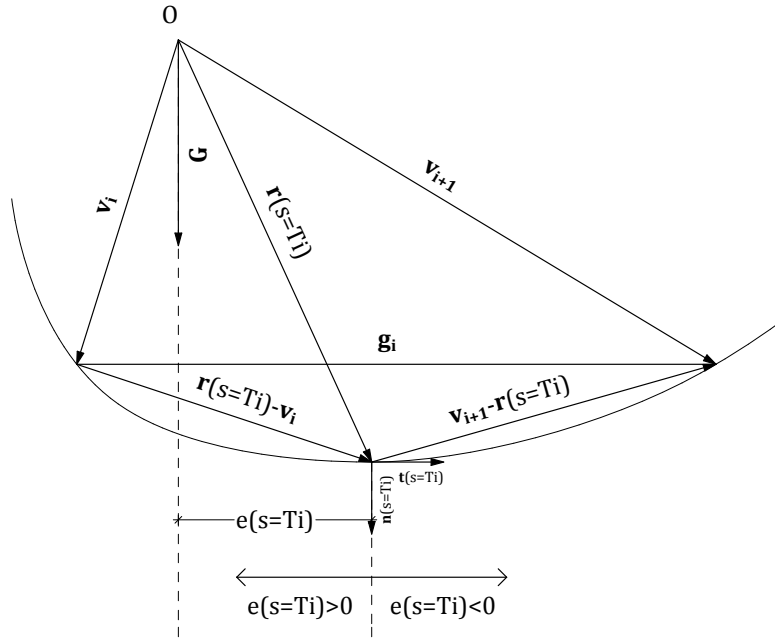
## 6. Síkgörbét közelítő sokszög egyensúlyai

Egy, a testek osztályozására ajánlott új módszer a testbe írt, azt közelítő poliéder egyensúlyi helyzeteinek megszámlálásán alapszik. Az alábbiakban síkbeli példán demonstráljuk a külpontosság függvény használhatóságát egy síkgörbét közelítő sokszög stabil egyensúlyainak megszámlálásához. Ez a sokszög oldalain való egyensúlyozást jelent, az instabil egyensúlyok a sokszögcsúcsokon találhatóak. Először egy módszert közlünk tetszőleges számú sokszög egyensúlyainak megszámlálására, majd zárt képletet vezetünk le az egyensúlyok számának határértékére, ahogy a sokszög oldalszáma tart a végtelenbe.

### 6.1. Stabil egyensúlyok végesben

A síkgörbébe írt sokszöget az oldalain egyensúlyozva, a megtámasztással nem egy elemi pont, hanem egy véges hosszú szakasz érintkezik. A sokszög akkor egyensúlyozható az oldalán, hogyha annak és  $\mathbf{G}$ -nek van dőféspontja. Ez könnyen eldönthető a külpontosság függvény segítségével.

Legyen  $P^n = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$  egy sokszög, amit úgy kapunk, hogy  $\mathbf{v}_i = \mathbf{r}(s = \delta + \frac{1}{n}(i-1))$ ,  $\delta < \frac{1}{n}$ ! (A kifejezésben  $\delta$  a diszkrétizáció kezdőpontját jelöli.) Legyen  $\mathbf{g}_i$  egy tetszőleges sokszögoldal. Jelölje  $s = Ti$  azt a pontot  $\mathbf{r}(s)$ -en, ahol  $\mathbf{g}_i \parallel \mathbf{t}(s = Ti)$ . A sokszög akkor egyensúlyozható  $\mathbf{g}_i$ -n, hogyha  $\mathbf{G}$  hatásvonala elmetszi  $\mathbf{g}_i$ -t. Ennek a matematikai leírása függ  $e(s = Ti)$  előjelétől (6. ábra).



6. ábra.

Hogyha  $e(s = Ti) > 0$ , a feltétel:

$$|(\mathbf{r}(s = Ti) - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{t}(s = Ti)| \geq e(s = Ti), \quad (46)$$

$e(s = Ti) < 0$  esetén pedig:

$$|(\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{r}(s = Ti)) \cdot \mathbf{t}(s = Ti)| \geq |e(s = Ti)|. \quad (47)$$

Ez alapján minden oldalról eldönthető az egyensúly.

## 6.2. Stabil egyensúlyok a végtelenben

Ha kellően sok oldalú sokszöggel közelítjük a görbét, az ívet a sokszögoldal végpontjai között közelíthetjük körrel. Ekkor a (46) és (47) feltételek bal oldalát közelíthetjük  $\frac{1}{2} \frac{l}{n}$ -vel.

Megfigyelték[3], hogy a diszkretizált sokszög oldal számát növelve egyensúlyok csak  $\mathbf{r}(\mathbf{s})$  egyensúlyi pontjai körül találhatók. Legyen egy ilyen pont  $s = s_0$ . Mivel  $\mathbf{r}(\mathbf{s})$   $C^3$  folytonos, (2)-ből és (6)-ból láthatóan  $e(s)$   $C^2$  folytonos. Így közelíthető  $s = s_0$  közelében  $e^*(s) = m \cdot s$  egyenessel. (14) alapján  $m = 1 - \kappa(s = s_0) \cdot h(s = s_0)$ . Az egyensúlyi pontokban  $\mathbf{r}(s) \parallel \mathbf{n}(s)$ , ezért  $h(s = s_0) = \rho(s = s_0)$ . A fenti két közelítéssel élve az egyensúly feltétele a következő módon fogalmazható meg:

$$\frac{l}{2n} \geq |e^*(s)|. \quad (48)$$

Jelölje  $s_{equ}$  azt az ívhosszdarabot  $s = s_0$  környezetében, ahol teljesül (48). Hosszára az alábbi adódik:

$$s_{equ} = \left| \frac{2 \frac{l}{2n}}{m} \right|. \quad (49)$$



Ilyen hosszú ívdarabon lehet  $s = s_0$  környezetében stabil egyensúlyt találni. Az egyensúlyok száma pedig attól függően, hogy hol kezdődik a diszkretizáció:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(n) = \left\lfloor \frac{s_{equ}}{\frac{l}{n}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{|1 - \kappa(s = s_0) \cdot \rho(s = s_0)|} \right\rfloor \quad (50)$$

vagy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(n) = \left\lfloor \frac{1}{|1 - \kappa(s = s_0) \cdot \rho(s = s_0)|} \right\rfloor + 1 \quad (51)$$

A  $+1$  tag akkor szükséges, ha  $s_{equ} = k \cdot \frac{l}{n}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  és  $s_{equ}$  széleire sokszögoldalok felezőpontjai esnek. A sokszög összes egyensúlyát megkapjuk az egyensúlyi pontok körüli egyensúlyok összegzésével. Ezek a képletek megegyeznek a G. Domokos, Zs. Lángi, T. Szabó által leírt [2] képletekkel.

## 7. Összefoglalás

A támaszfüggvény a helyvektor(függvény) egy vetülete a természetes koordináta rendszerben. Bevezetjük a külpontosság függvényeket - a helyvektornak a természetes koordináta rendszer többi irányába eső vetületét - mint a támaszfüggvény lehetséges általánosítását. Felírtuk ezen függvényeknek és a támaszfüggvénynek egymással való kapcsolatait. Ezen kapcsolatok miatt lehetséges helyreállítani a helyvektort a támasz illetve külpontosság függvényekből, utóbbiakból differenciál-egyenletekkel. Ezen kívül gyakorlati példát hoztunk a külpontosság függvény alkalmazhatóságára egy folyamatban lévő kutatásban. Egyrészt egy szigorúan konvex síkgörbe adott diszkretizációjából létrejövő sokszög egyensúlyainak meghatározása végezhető egyszerűen segítségével. Másrészt végtelen finom diszkretizáció esetén az egyensúlyok határértékére zárt képlet kapható a külpontosság függvény használatával.

## Hivatkozások

- [1] R. Schneider: Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory, Cambridge University Press, 1993.02.25.
- [2] G. Domokos, Zs. Lángi, T. Szabó: On The Equilibria of Finely Discretized Curves and Surfaces, arXiv:1106.0626v1 (2011).
- [3] Z. Šír, J. Gravesen, B. Jüttler: Curves and surfaces represented by polynomial support functions, Theoretical Computer Science Volume 392 Issue 1-3 (2008 február, 141-157. oldal)  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.tcs.2007.10.009>
- [4] G. Domokos, A. Sipos, T. Szabó: The Mechanics of Rocking Stones: Equilibria on Separated Scales, arXiv:1104.4813v1 (2011).