Absztrakt

Dolgozatomban egy l hosszúságú, egyik végén befogott, másik végén görgővel megtámasztott, a görgőtől x távolságra, egyetlen koncentrált erővel terhelt, állandó keresztmetszetű konzolon keresem a teher legkedvezőtlenebb helyzeteit, kis elmozdulások feltételezésével, különböző kritériumok alapján: A) képlékeny csuklók egyidejű keletkezése, B) maximális nyomaték lineárisan rugalmas anyagmodell esetén, C) maximális (globális) lehajlás lineárisan rugalmas anyagmodell esetén. Ezen kérdésekre a következő választ kaptam a *Maple* programcsomag felhasználásával:

$$x_A = x_C = (\sqrt{2} - 1)l, \quad x_B = \frac{1}{3}\sqrt{3}l,$$

Tartalomjegyzék

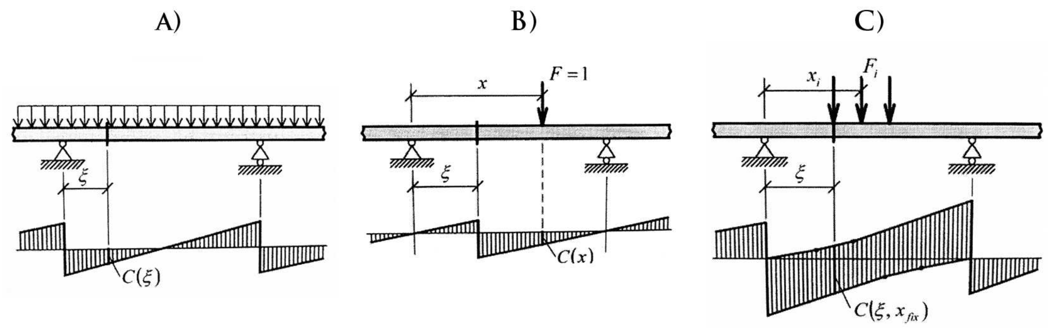
1. Bevezetés

1.1. Előzmények

Műegyetemi tanulmányaink során *[Kurutzné, 2003]* a tartók igénybevételének meghatározásának alapvetően két vizsgálati módszerével ismerkedtünk meg, attól függően, hogy a vizsgálat folyamán mely paramétert tekintjük változónak, melyet rögzítettnek. Vizsgálhatjuk a tartó igénybevételeit:

A) egy rögzített helyzetű (álló) teheregyüttes hatására, meghatározva így az adott mechanikai jellemző változását a keresztmetszet helyzetének (ξ) változása függvényében : ezen függvényeket neveztük igénybevételi/elmozdulási függvényeknek $[C\,(\xi)]$. [1.A ábra] Ezek meghatározásával statikai és szilárdságtani tanulmányaink során foglalkoztunk.

B) egy mozgó egységerő helyzet-változása függvényében egy rögzített helyzetű keresztmetszetben keletkező külső vagy belső hatás változását; ekkor hatásfüggvényről (hatásábráról) beszélünk $[C\,(x)]$. [1.B ábra]



1. ábra.
A) Tartó $C\,(\xi)$ igénybevételi ábrája, *B)* Tartó $C\,(x)$ hatásábrája *C)* Tartó $C\,(\xi, x)$ lehetséges igénybevételi ábrája [*Kurutzné, 2003*]

Jelen dolgozatnak nem célja a fenti kérdéskör bemutatása, mivel azt a szakirodalom részletesen tartalmazza. [*Kurutzné, 2003*; *Korányi, 1962*; *Roller, 1995*] Természetes kérdésként vetődik fel azonban a szerkezetre legveszélyesebb teherállás megállapítása, melynek során a tartó igénybevételeit vagy lehajlását a két változó (ξ, x) függvényében egyszerre vizsgáljuk (példaként említhetők bak- és híddaruk terhei, hidak mozgó járműterhei). A kérdés fontosságára Kurutzné *[Kurutzné, 2003]* is rámutat; a kétváltozós feladatot az ún. lehetséges igénybevételi ábrával szemlélteti $[C\,(\xi, x)]$. Ezen ábra a tartó minden egyes keresztmetszetében megadja az igénybevételek lehetséges értékeit adott nagyságú és elhelyezkedésű, de változó teherállás esetén, tehát

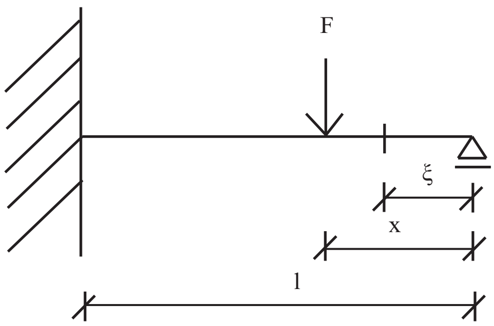
minden keresztmetszethez egy intervallumot rendel (intervallum-ábra). A fent említett feladat-típusokat az 1. táblázat foglalja össze.
A kétváltozós feladatra, melyet az 1.C ábrán illusztrált többértékű függvény szemléltet, dolgozatomban analitikus választ kívánok adni.

A fogalom	A teher helyzete (x)	A keresztmetszet helyzete (ξ)	A függvény
igénybevételi ábra	rögzített	változó	$C(\xi)$
igénybevételi hatásábra	változó	rögzített	$C(x)$
lehetséges igénybevételek ábrája	változó	változó	$C(\xi, x)$

1. táblázat.
Igénybevételi vizsgálatok típusai *[Kurutzné, 2003]*

1.2. A feladat ismertetése

Adott egy l hosszúságú, egyik végén befogott, másik végén görgővel megtámasztott, állandó keresztmetszetű konzol, melyet a görgőtől x távolságra, egyetlen koncentrált erővel terhelünk. Jelölje ξ a vizsgált keresztmetszet görgős megtámasztástól mért távolságát! [2.ábra] A nyomatékot az $M(\xi, x)$, a lehajlást a $w(\xi, x)$ kétváltozós függvénnyel írjuk le, ahol $0 \leq \xi \leq l, 0 \leq x \leq l$.



2. ábra.
A vizsgált egyszeresen határozatlan tartó

Keressük a teher legkedvezőtlenebb helyzeteit, kis elmozdulások feltételezésével, különböző kritériumok alapján:

A) képlékeny csuklók egyidejű keletkezése

Keressük azon $x = x_A$ teherállást, melynek fennállása esetén az egyszeresen határozatlan tartó egyetlen lépésben alakul mechanizmussá. Ez csak úgy lehetséges, ha $M\left(l,x\right)$ befogási-, illetve $M\left(x,x\right)$, F erő alatt fellépő nyomaték egyszerre éri el $M_{Rd\,pl}$ képlékeny határnyomatékot; vagyis keressük azon $x = x_A$ teherállást, mely esetén az

$$M\left(l,x\right) = M\left(x,x\right) \tag{1}$$

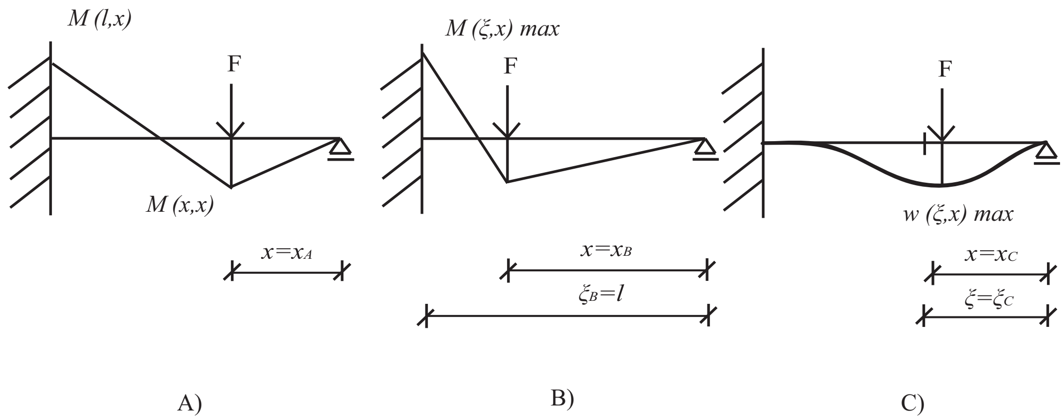
egyenlet teljesül. [3.A ábra]

B) maximális nyomaték lineárisan rugalmas anyagmodell esetén

Keressük azon $x = x_B$ teherállást és $\xi = \xi_B$ pozíciót, melyekre az $M(\xi, x)$ függvény felveszi globális maximumát. [Ezt illusztrálja a 3.B ábra $\xi_B = l$ esetén]

C) maximális (globális) lehajlás lineárisan rugalmas anyagmodell esetén

Keressük azon $x = x_C$ teherállást és $\xi = \xi_C$ pozíciót, melyekre $w\left(\xi,x\right)$ függvény felveszi globális maximumát. [3.C ábra]



3. ábra.
Pesszimális teherállás vizsgálati szempontjai: A) Képlékeny csuklók egyidejű keletkezése B) Maximális nyomaték keletkezése $\xi_B = l$ esetén C) Maximális lehajlás keletkezése

2. Feladatmegoldások

2.1. Képlékeny csuklók egyidejű keletkezése

A határozatlan tartót erőmódszerrel *[Roller, 1995]* megoldjuk: tekintsük törzstartónak a befogási nyomaték-kényszer eltávolításával kapott kéttámaszú tartót. Meghatározzuk e_{10} egység- és e_{11} terhelési tényezőt:

$$e_{10} = -\frac{(l^2 - x^2)xF}{6l}\frac{1}{EI} \tag{2}$$

$$e_{11} = \frac{l}{3}\frac{1}{EI} \tag{3}$$

A kompatibilitási egyenletből $M\,(l, x)$ befogási nyomaték meghatározható:

$$M\,(l, x) = -\frac{e_{10}}{e_{11}} = \frac{(l^2 - x^2)xF}{2l^2} \tag{4}$$

Az F erő alatti $M\,(x, x)$ nyomaték értékét felírva, (1) egyenletből a keresett $x = x_A$ teherállás egyértelműen meghatározható $0 \leq x_A$ feltétel mellett.

$$M\,(x, x) = \frac{(l - x)xF}{l} - \frac{(l^2 - x^2)x^2F}{2l^3} \tag{5}$$

$$x = x_A = (\sqrt{2} - 1)l \tag{6}$$

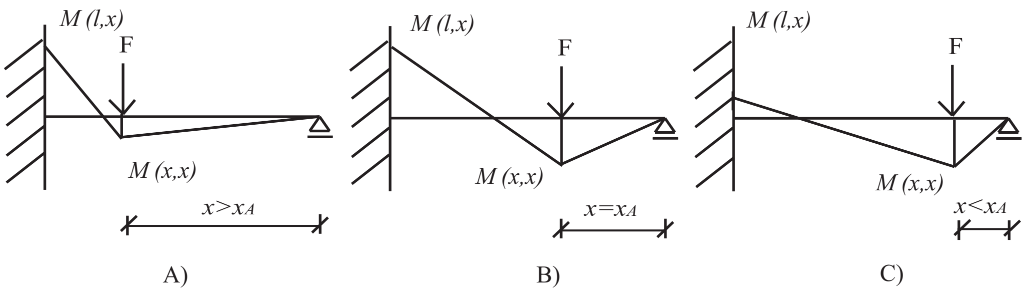
A kapott $x = x_A$ értéket (5) egyenletbe visszahelyettesítve kapjuk az F_{Rdpl} képlékeny határerő értékét:

$$F_{Rdpl} = \frac{M_{Rdpl}}{l}\frac{2}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)(2 - \sqrt{2})} \tag{7}$$

Tehát abban az esetben, ha F erő a görgős támasztól számított $x = x_A = (\sqrt{2} - 1)l$ távolságra helyezkedik el, az egyszeresen határozatlan tartó egy lépésben alakul mechanizmussá; ekkor a szerkezet globális tartaléka minimális; a képlékeny határerő értékét a (7) egyenlet adja meg.

2.2. Maximális nyomaték lineárisan rugalmas anyagmodell esetén

A 2.1 szakaszban meghatároztuk azt az $x = x_A$ teherállást, amely fennállása esetén a befogási nyomaték megegyezik az F erő alatt keletkező nyomatékkal [4.B ábra]. Eme speciális teherállást kivéve a tartó minden más teherállás esetén csupán egy nyomatéki maximum-ponttal rendelkezik, mely a teher helyzetétől függően vagy a teher alatt, vagy a befogás helyén alakul ki; ez a pont az első képlékeny csukló kialakulásának helye. Az $x < x_A$ feltétel fennállása esetén e nyomatéki maximum F erő alatt alakul ki ($\xi = x$) [4.C ábra], míg az $x_A < x$ esetben a befogásnál keletkezik ($\xi = l$). [4.A ábra] Célunk a változó teherállás hatására kialakuló $M(\xi, x)$ nyomaték maximumának és az ehhez tartozó $x = x_B$ teherállás meghatározása.



4. ábra.
A nyomatéki maximum alakulása a teherállás függvényében

A megoldás menete a következő: meghatározzuk $M(x, x)$ és $M(l, x)$ függvényeket; megkeressük maximumuk helyét: $x = x_{B1}$ ill. $x = x_{B2}$. Ezen helyeken fellépő nyomatéki maximumokat jelölje rendre $M(x_{B1}, x_{B1}) = M_{B1}$ ill. $M(l, x_{B2}) = M_{B2}$; célunk (M_{B1}, M_{B2}) értékek M_B maximumának meghatározása.

A görgős támasznál fellépő F_A erő erőmódszerrel kiszámolható, értéke:

$$F_A = \frac{1}{2}\frac{F(x^3 - 3l^2x + 2l^3)}{l^3} \tag{8}$$

$x < x_A$ esetén:

$$M(x, x) = -F_A x \tag{9}$$

F_A (8) értékét (9) függvénybe behelyettesítve:

$$M(x, x) = -\frac{1}{2}\frac{F(x^3 - 3l^2x + 2l^3)x}{l^3} \tag{10}$$

$x_A < x$ esetén:

$$M(l, x) = -F_A l + F(l - x) \tag{11}$$

F_A (8) értékét (11) függvénybe behelyettesítve:

$$M\left(l,x\right)=-\frac{1}{2}\frac{F(x^3-3l^2x+2l^3)}{l^2}+F(l-x) \tag{12}$$

Határozzuk meg M_{B1} értéket! Jelölje a nyíróerő-függvényt $V(\xi,x)$, melyre

$$V(\xi,x)=\frac{d}{d\xi}M(\xi,x). \tag{13}$$

Jelen esetben $\xi=x$:

$$V(x,x)=-\frac{F(2x^3-3l^2x+l^3)}{l^3} \tag{14}$$

$M(x,x)$ nyomatéki függvénynek szélsőértéke lehetséges, ha

$$V(x_{B1},x_{B1})=0. \tag{15}$$

Az $0<x<x_A$ kezdeti feltétel figyelembevételével (14) és (15) egyenletekből $x=x_{B1}$ egyértelműen kifejezhető:

$$x=x_{B1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}l \tag{16}$$

A kapott $x=x_{B1}$ értéket (10) egyenletbe behelyettesítve kapjuk M_{B1} értékét:

$$M_{B1}=-\frac{3}{16}(\sqrt{3}-3)(\sqrt{3}-1)Fl \tag{17}$$

Hasonlóan határozzuk meg M_{B2} értékét! (13) egyenletből, $\xi=l$ fennállása esetén:

$$V(l,x)=\frac{1}{2}\frac{F(l^2-3x^2)}{l^2} \tag{18}$$

Hasonlóan a (15) feltételhez, most is azt vizsgáljuk, amikor

$$V(l,x_2)=0. \tag{19}$$

Az $x_A<x<l$ kezdeti feltétel figyelembevételével (18) és (19) egyenletekből $x=x_{B2}$ egyértelműen kifejezhető:

$$x=x_{B2}=\frac{1}{3}\sqrt{3}l \tag{20}$$

A kapott $x=x_{B2}$ értéket (12) egyenletbe behelyettesítve kapjuk M_{B2} értékét:

$$M_{B2}=\frac{1}{9}\sqrt{3}Fl \tag{21}$$

M_{B1} és M_{B2} szélsőértékeket összehasonlítva az utóbbi érték a nagyobb abszolútértékű, tehát a tartón kialakuló $M\left(\xi,x\right)$ nyomaték maximális M_B értéke:

$$M_B = \frac{1}{9}\sqrt{3}Fl, \tag{22}$$

mely a görgős megtámasztástól számított $x_B = x_{B2} = \frac{1}{3}\sqrt{3}l$ teherállás esetén, a befogás helyén alakul ki.

2.3. Maximális (globális) lehajlás lineárisan rugalmas anyagmodell esetén

Tartók lehajlásával kapcsolatos legkedvezőtlenebb teherállás vizsgálatának relevanciáját mi sem támasztja jobban alá, minthogy a szerkezetek lehajlásának maximális értékét szabványokban határozzák meg. A következő kérdésekre keressük a választ: változó F teherállás esetén a tartó mely pontjában alakul ki maximális lehajlás, mennyi ennek az értéke, illetve milyen teherállás eredményeként jön létre.
A Mohr-analógia alapján a nyomatéki függvény egyszeres integrálása során a tartó $\int M(\xi,x)\,d\xi = \vartheta\,(\xi,x)$ tengelyelfordulás-függvényéhez, míg ezt integrálva a tartó $\int \vartheta(\xi,x)\,d\xi = w\,(\xi,x)$ lehajlás-függvényéhez jutunk az alábbi peremfeltételek figyelembevételével:

I.) $M\,(0,x) = 0$ a csuklóban a nyomaték zérus

II.) $\vartheta\,(l,x) = 0$ a befogásban az elfordulás zérus

III.) $w\,(l,x) = 0$ a befogásnál az elmozdulás zérus

IV.) $w\,(0,x) = 0$ a csuklóban az elmozdulás zérus

V.) $\vartheta\,(\xi,x)$ folytonos $0 \le \xi \le l$ intervallumon

VI.) $w\,(\xi,x)$ folytonos $0 \le \xi \le l$ intervallumon

Keressük $w\,(\xi,x) = 0$ globális maximumát, illetve az ehhez tartozó erő $x = x_C$ helyzetét.

A görgős támasznál fellépő erőt jelölje F_A, mely ismert érték, lásd (8) egyenlet. $M(\xi,x)$ nyomatékfüggvényt felírva, az első integrálás elvégzésével a következő eredményre jutunk:

$$M(\xi,x) = \begin{cases} F_A\xi & \text{ha } \xi \le x \quad (a) \\ F_A\xi - F(\xi - x) & \text{ha } x < \xi \quad (b) \end{cases} \tag{23}$$

$$\vartheta(\xi,x)=\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{F_A\xi^2}{EI}+C & \text{ha } \xi\le x \quad (a)\\ \frac{\frac{1}{2}F_A\xi^2-F(\frac{1}{2}\xi^2-x\xi)}{EI}+D & \text{ha } x<\xi \quad (b)\end{cases} \tag{24}$$

ahol C és D integrálási konstans. D konstans értéke II.) peremfeltétel és (24 b) egyenletekből meghatározva:

$$D=-\frac{1}{2}\frac{l(F_Al-Fl+2Fx)}{EI} \tag{25}$$

Az V.) peremfeltétel alapján $x=x_A$ esetben (24 a) = (24 b), melyből C konstans meghatározható.

$$C=\frac{1}{2}\frac{Fx^2-F_Al^2+Fl^2-2lFx}{EI} \tag{26}$$

C és D értékeket (24) egyenletbe visszahelyettesítve kapjuk $\vartheta\,(\xi,x)$ tengelyelfordulás-függvényt:

$$\vartheta(\xi,x)=\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{F_A\xi^2+Fx^2-F_Al^2+Fl^2-2lFx}{EI} & \text{ha } \xi\le x \quad (a)\\ \frac{1}{2}\frac{F_A\xi^2-F\xi^2+2Fx\xi-F_Al^2+Fl^2-2lFx}{EI} & \text{ha } x<\xi \quad (b)\end{cases} \tag{27}$$

A kapott $\vartheta(\xi,x)$ tengelyelfordulás-függvény integrálásával kapjuk $w(\xi,x)$ lehajlás-függvényt. H integrálási konstans III) peremfeltételből, G konstans IV) peremfeltételből számítható. Ezek alapján:

$$w(\xi,x)=\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{3}F_A\xi^3+Fx^2\xi-F_Al^2\xi+Fl^2\xi-2lFx\xi}{EI}+G & \text{ha } \xi\le x \quad (a)\\ \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{3}F_A\xi^3-\frac{1}{3}F\xi^3+Fx\xi^2-F_Al^2\xi+Fl^2\xi-2lFx\xi}{EI}+H & \text{ha } x<\xi \quad (b)\end{cases} \tag{28}$$

$$H = -\frac{1}{6}\frac{l(-2F_A l^2 + 2Fl^2 - 3Flx)}{EI} \tag{29}$$

$$G = 0 \tag{30}$$

A VI.) peremfeltételből következően a kapott H és G konstansokat, illetve $x = x_A$ értéket (28) egyenletbe visszahelyettesítve megkapjuk F_A értékét, amely megegyezik a (8) egyenletben meghatározott értékkel. F_A-t behelyettesítve (27), (28) egyenletekbe:

$$\vartheta(\xi, x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}\frac{F(-\xi^2x^3+3\xi^2l^2x-2\xi^2l^3+l^2x^3+l^4x)}{l^3EI} & \text{ha } \xi \le x \quad (a) \\ -\frac{1}{4}\frac{Fx(-\xi^2x^2+3\xi^2l^2-4\xi l^3+l^2x^2+l^4)}{l^3EI} & \text{ha } x < \xi \quad (b) \end{cases} \tag{31}$$

$$w(\xi, x) = \begin{cases} -\frac{1}{12}\frac{F\xi(-\xi^2x^3+3\xi^2l^2x-2\xi^2l^3-6x^2l^3+3l^2x^3+3l^4x)}{l^3EI} & \text{ha } \xi \le x \quad (a) \\ -\frac{1}{12}\frac{Fx(-\xi^3x^2+3\xi^3l^2-6\xi^2l^3+3\xi l^2x^2+3\xi l^4-2x^2l^3)}{l^3EI} & \text{ha } x < \xi \quad (b) \end{cases} \tag{32}$$

$w(\xi, x)$ lehajlás-függvény szélsőértéke parciális deriválással meghatározható,melynek során az alábbi eredményeket kapjuk:

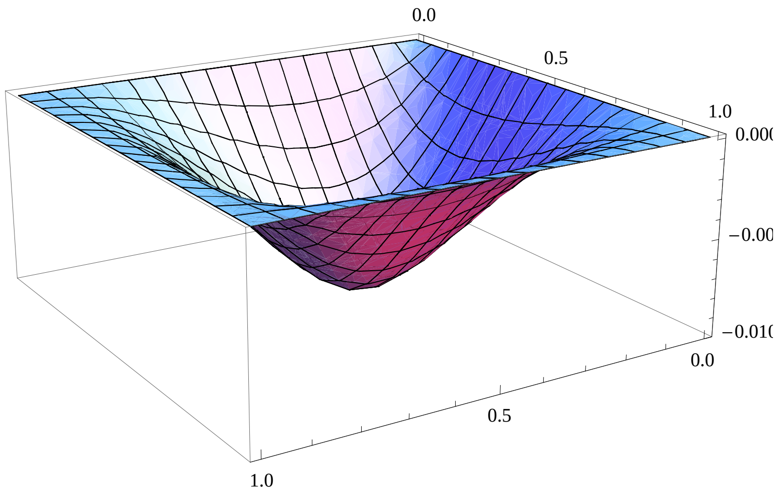
$$x = x_C = (\sqrt{2} - 1)l \tag{33}$$

teherállás fennállása esetén keletkezik maximális lehajlás, $\xi = \xi_C$ helyen:

$$\xi = \xi_C = (\sqrt{2} - 1)l \tag{34}$$

A maximális lehajlás értékét x_C és ξ_C (32) egyenletbe való visszahelyettesítésével kapjuk:

$$w(\xi, x)_{max} = w(\xi_C, x_C) = \frac{1}{3}\frac{(\sqrt{2} - 1)^2(2\sqrt{2} - 3)}{EI}Fl^3 \tag{35}$$



5. ábra.
A tartó $w(\xi, x)$ lehajlásfüggvénye

3. Összefoglalás

A dolgozatban egy l hosszúságú, egyik végén befogott, másik végén görgővel megtámasztott, a görgőtől x távolságra, egyetlen koncentrált erővel terhelt, állandó keresztmetszetű konzolon kerestem a teher legkedvezőtlenebb helyzeteit, kis elmozdulások feltételezésével, melynek során az alábbi eredményekre jutottam:

A) képlékeny csuklók keletkezése $x_A = (\sqrt{2} - 1)l$ teherállás esetén egyidejűleg következik be

B) a tartón maximális nyomaték $x_B = \frac{1}{3}\sqrt{3}l$ teherállás esetén, a befogás helyén lép fel, értéke $M_B = \frac{1}{9}\sqrt{3}Fl$

C) a tartón maximális lehajlás $x_C = (\sqrt{2} - 1)l$, azaz x_A értékkel azonos teherállás esetén keletkezik a teher alatt, értéke $w(\xi, x)_{max} = \frac{1}{3}\frac{(\sqrt{2}-1)^2(2\sqrt{2}-3)}{EI}Fl^3$.

4. Melléklet

A dolgozat melléklete három Maple-fájl formájában elérhető a http://www.szt.bme.hu/fekete címen.

Hivatkozások

[1] Kurutzné Dr. Kovács Márta, „*Tartók statikája*”, Műegyetemi Kiadó, 2003.
[2] Korányi Imre, „*Tartók sztatikája – sztatikailag határozott tartók*”, Tankönyvkiadó, 1962.
[3] Dr. Roller Béla – Dr. Árvay Kálmán, „*Tartók statikája II. – Statikailag határozatlan tartók*”, Műegyetemi Kiadó, 1995.
[4] http://www.szt.bme.hu/fekete